

La suite  $(u_n)$  est définie par :  $u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$  pour tout entier  $n$  non nul.

1/ Calculer  $u_2, u_3$  et  $u_4$ .

$$u_2 = u_1 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} u_1 = \frac{1}{2}.$$

$$u_3 = u_2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} u_2 = \frac{1}{3}.$$

$$u_4 = u_3 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} u_3 = \frac{1}{4}.$$

2/ Conjecturer la formule qui donne  $u_n$  en fonction de  $n$ .

Les quelques résultats précédents laissent conjecturer :  $u_n = \frac{1}{n}$ .

3/ Démontrer cette formule par récurrence.

Soit la relation de récurrence  $P_n : " u_n = \frac{1}{n} "$ .

a) *Initialisation* : Vérifions  $P_1$  vraie, soit  $u_1 = \frac{1}{1} = 1$ , ce qui est vrai.

b) *Héritage* : Supposons  $P_n$  vraie ( $u_n = \frac{1}{n}$ ). Peut-on en déduire  $P_{n+1}$  vraie ( $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ ) ?

$u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$  dans lequel on reporte  $u_n = \frac{1}{n}$ , puisque  $P_n$  est supposée vraie.

$$u_{n+1} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

On a bien montré que  $P_{n+1}$  est vraie, sous réserves que  $P_n$  le soit.

c) *Conclusion* :  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .