

**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :**

a)  $e^x - e^{-x} = 0$

1<sup>ère</sup> méthode (à privilégier) :

On sait que la fonction exponentielle est définie sur  $\mathbb{R}$ , continue et dérivable, strictement croissante.

En conséquence :

$e^A$  est défini (calculable) dès que  $A$  l'est ,  
 $e^x$  conserve les ordres :  $\begin{cases} e^A < e^B \Leftrightarrow A < B \text{ (croissance stricte)} \\ e^A = e^B \Leftrightarrow A = B \text{ (injectivité)} \end{cases}$  .

$e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x$  d'après la croissance stricte de l'exponentielle.

$x = -x \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$  .

D'où :  $S = \{0\}$  .

2<sup>ème</sup> méthode (trop longue dans ce cas particulier) :

Procédons au changement de variable  $X = e^x$  .

On sait qu'alors :  $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{X}$  (on peut remarquer que  $e^x > 0$ , donc non nul, autorise l'écriture  $\frac{1}{X}$ ).

$e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2 - 1}{X} = 0 \Leftrightarrow X^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 = 1 \Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = +1$  .

- Si  $X = -1$ , soit  $e^x = -1$ . Il n'y a pas de solution  $x$ , puisque qu'une exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives.

Une exponentielle est toujours strictement positive, soit  $e^A > 0$ , quel que soit  $A \in \mathbb{R}$

- Si  $X = +1$ ; soit  $e^x = +1$  :

Comme  $e^0 = 1$ , l'équation équivaut à  $e^x = e^0$ , soit  $x = 0$  puisque l'exponentielle est injective.

D'où :  $S = \{0\}$  .

b)  $e^x + e^{-x} = 0$

On sait que  $e^A > 0$  pour tout  $A$  réel, donc l'équation  $e^x + e^{-x} = 0$  n'a pas de solution, puisque la somme de deux quantités strictement positives ne peut être nulle.

D'où :  $S = \emptyset$  .

c)  $e^{-x+4} = (e^{-x})^4$

Pas de problème de domaine de définition ( $-x + 4$  et  $-x$  toujours calculables).

Les exponentielles respectent les formules des puissances :

$e^a \times e^b = e^{a+b}$  ,  $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$  ,  $(e^a)^n = e^{na}$

$$e^{-x+4} = (e^{-x})^4 \Leftrightarrow e^{-x+4} = e^{-4x} \Leftrightarrow -x + 4 = -4x \text{ puisque } e^A = e^B \Leftrightarrow A = B .$$

$$-x + 4 = -4x \Leftrightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} .$$

$$\text{D'où : } S = \left\{ -\frac{4}{3} \right\} .$$

$$\mathbf{d)} \quad e^{x^2-4} = (e^{x+2})^2$$

Pas de problème de domaine de définition (  $-x + 4$  et  $-x$  toujours calculables).

$$e^{x^2-4} = (e^{x+2})^2 \Leftrightarrow e^{x^2-4} = e^{2(x+2)} \text{ puisque } (e^A)^2 = e^{2A} .$$

$$\text{On déduit : } x^2 - 4 = 2(x + 2) \text{ puisque } e^A = e^B \Leftrightarrow A = B .$$

$$\text{D'où : } x^2 - 2x - 8 = 0 \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac = 36 > 0 .$$

$$\text{Les racines sont : } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = +4 .$$

$$\text{D'où : } S = \{-2, +4\} .$$