**On désigne par $f$ la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ .**

**On note $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O , \vec{i}, \vec{j})$**
**(unité graphique : 5 cm).**

**1/ Vérifier que, pour tout nombre réel $x$ : $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ .**

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x + e^0} = \frac{e^x}{e^x + 1} .$$

**Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.**

On sait $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1 \end{array} \right\}$ , d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1 + e^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ .

Le graphe présente une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ .

On sait $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ , d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ , soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + e^{-x}} = 1$ .

Le graphe présente une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ .

**Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x$ . En déduire les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ .**

$f$ est partout définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ , comme rapport de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, de dénominateur non nul, puisque $e^u > 0$ , pour tout $u$ réel.

$f = \dfrac{1}{u} \Rightarrow f' = -\dfrac{u'}{u^2}$ et $(e^u)' = u'.e^u$ . D'où : $f'(x) = \left(\dfrac{1}{1 + e^{-x}}\right)' = - \dfrac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$ .

Sachant $e^u > 0$ , quel que soit $u$ réel, on déduit : $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ . La fonction $f$ est partout croissante.

**Dresser le tableau de variations de $f$ .**

On peut ajouter comme valeur particulière $f(0) = \dfrac{1}{1 + e^0} = \dfrac{1}{2}$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | \| | + | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | 1/2 | ↗ | 1 |

On peut vérifier que la courbe admet pour centre de symétrie le point $A(0 ; \frac{1}{2})$ .

Il suffit, pour montrer que $A(a , b)$ est centre de symétrie, de prouver : $f(a + h) + f(a – h) = 2b$ , $\forall h \in \mathbb{R}$ .

$$f(0 + h) + f(0 – h) = f(h) + f(-h) = \frac{1}{1 + e^{-h}} + \frac{1}{1 + e^h} = \frac{e^h}{e^h + 1} + \frac{1}{1 + e^h} = \frac{e^h + 1}{e^h + 1} = 1 = 2b .$$

**Tracer la courbe ($C$) et ses asymptotes éventuelles dans le repère ($O$ , $\vec{i}$ , $\vec{j}$) .**