On considère la fonction f définie sur]0 ; 2] par $f(x) = 2x^2 - 3 - \ln x$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$: 5 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

1/ Déterminer la limite de f en 0 .

On sait $\lim\limits_{x \to 0} (2x^2 - 3) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$. Par soustraction, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

En donner une interprétation graphique. Donner l'équation de l'asymptote éventuelle à (C) .

(C) présente une asymptote verticale, d'équation $x = 0$.

Il ne peut pas y avoir d'autre asymptote sur]0 ; 2] , puisque f est définie en tout $x \in$]0 ; 2] .

2/ Dresser le tableau complet des variations de f .

f est définie, continue et dérivable sur]0 ; 2] , telle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et $f(2) = 5 - \ln 2 \approx 4{,}3$.

Dérivée :

$$f(x) = 2x^2 - 3 - \ln x \Rightarrow f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x} .$$

Comme x , on déduit $\dfrac{2x+1}{x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x - 1$.

Recherche de l'extremum :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = +\frac{1}{2}, \text{ avec } y = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 - \ln\frac{1}{2} = -\frac{5}{2} + \ln 2 \approx -1{,}8 .$$

On remarquera l'utilisation de $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$.

La courbe (C) présente un extremum en $E(+\frac{1}{2}, -\frac{5}{2} + \ln 2)$.

Signe de la dérivée :

$f'(x)$ est du signe de $2x - 1$, soit : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > +\frac{1}{2}$.

Tableau de Variation :

x	0		1/2		2
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-5/2 + \ln 2$	↗	$5 - \ln 2$

3/ Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 .

L'équation de la tangente à (C) en $x = a$ est $T_a | \, y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

D'où $T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $T_1 : y = 3(x - 1) - 1$

On déduit : $T_1 : y = 3x - 4$.

4/ Tracer (T) et (C) .