Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = 1 + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1/ Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

Si $x \to 0^+$ alors $\left\{\begin{matrix} \ln x \to -\infty \\ x \to 0^+ \end{matrix}\right\}$ donc $\dfrac{\ln x}{x} \to -\infty$. On déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Si $x \to +\infty$ alors $\left\{\begin{matrix} \ln x \to +\infty \\ x \to +\infty \end{matrix}\right\}$ donc $\dfrac{\ln x}{x}$ est *indéterminé* de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + 2\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$.

En déduire les asymptotes à la courbe (C).

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ prouve que (C) admet l'axe $y'y$, d'équation $x = 0$ pour asymptote verticale.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ prouve que (C) admet la droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale.

2/ Dresser le tableau complet des variations de f.

f est définie, continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$, comme somme et rapport de fonctions définies, continues et dérivables sur $]0\,,+\infty[$.

Dérivée :

On sait que $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = 0 + 2\,\frac{\frac{1}{x}\times x - 1.\ln x}{x^2} = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}.$$

Recherche des Extremum

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e^1 = e$, avec $y = f(e)\ 1 + 2\dfrac{\ln e}{e} = 1 + 2\times\dfrac{1}{e} = \dfrac{e+2}{e} \approx 1{,}74$.

La courbe (C) admet un extremum unique $E(e\,,\dfrac{e+2}{e})$.

Signe de la Dérivée

$f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$, d'où : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e$, puisque la fonction « ln », continue et strictement croissante *conserve les ordres.*

Tableau de Variation

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	–	
$f(x)$	‖$-\infty$	↗	$\dfrac{e+2}{e}$	↘	1

3-a) Montrer que (C) et la droite d'équation $y = 1$ ont un point commun A dont on calculera l'abscisse.

Soit (D) la droite horizontale d'équation $y = 1$.

$A(x\,,y) \in (C)\cap(D) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y = f(x) \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$ d'où $f(x) = 1$.

$f(x) = 1 \Leftrightarrow 1 + 2\dfrac{\ln x}{x} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x_A = 1$. (D) coupe (C) en $A(1\,,1)$.

d) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) en A .

L'équation de la tangente à (C_f) en $x = a$ est $T_a :\ y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$f(1) = y_A = 1$ et $f'(1) = \dfrac{2(1 - \ln 1)}{1^2} = 2$.

D'où $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow T : y = 2(x - 1) + 1$,

On obtient $T : y = 2x - 1$.

4/ Tracer (T) et (C) dans le repère $(O , \vec{i} , \vec{j})$.