Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e}{2}x^2 + (x+1)e^{-x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

a) Si $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e}{2}x^2\right) = +\infty \quad \text{tandis que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} (x+1)e^{-x} = -\infty .$$

La somme $f(x)$, est indéterminée de forme $\infty - \infty$.

Pour lever l'indétermination, factorisons e^{-x} : $f(x) = \left[\dfrac{e}{2}x^2e^x + (x+1)\right]e^{-x}$.

On sait que $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^2e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{e}{2}x^2e^x + (x+1)\right] = -\infty$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

On déduit que le produit $f(x) = \left[\dfrac{e}{2}x^2e^x + (x+1)\right]e^{-x}$ vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Si $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e}{2}x^2\right) = +\infty \quad \text{tandis que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (x+1)e^{-x} \text{ est une forme indéterminée de type } 0 \times \infty .$$

Levons cette indétermination : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x+1)e^{x} = -\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x + \lim\limits_{x \to -\infty} e^x$.

On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{-x} = 0$.

Par addition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e}{2}x^2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1)e^{-x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.