Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} \boldsymbol{e^x + e^y = 4} \\ \boldsymbol{\dfrac{e^x}{e^y} = 7} \end{cases}$

e^A est défini pour tout A réel, donc aucune condition de domaine de définition n'est à imposer.

Une somme d'exponentielle n'est pas exploitable, donc un changement de variable s'impose.

Posons : $X = e^x$ et $Y = e^y$.

Le système devient $\begin{cases} X + Y = 4 \\ \dfrac{X}{Y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 4 \\ X = 7Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7Y + Y = 4 \\ X = 7Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8Y = 4 \\ X = 7Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{1}{2} \\ X = \dfrac{7}{2} \end{cases}$,

On déduit : $\begin{cases} e^x = \dfrac{7}{2} \\ e^y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, résultats recevables puisque e^A doit être strictement positif.

On sait que $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$.

D'où : $\begin{cases} x = \ln \left(\dfrac{7}{2}\right) \\ y = \ln \left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 7 - \ln 2 \\ y = \ln 1 - \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 7 - \ln 2 \\ y = -\ln 2 \end{cases}$, soit $(x ; y) = (\ln 7 \ \ \ln 2 ; -\ln 2)$.

b) $\begin{cases} \boldsymbol{\ln (x + y) = 1} \\ \boldsymbol{\ln x + \ln y = 0} \end{cases}$

$\ln A$ est défini pour $A > 0$, ce qui impose $x > 0$ et $y > 0$.

On exploite $\ln a + \ln b = \ln (ab)$.

$\begin{cases} \ln (x + y) = 1 \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln (x + y) = 1 \\ \ln (xy) = 0 \end{cases}$.

On sait que $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$.

D'où : $\begin{cases} x + y = e \\ xy = 1 \end{cases}$.

<u>1ère méthode :</u>

Deux nombres de somme S *et produit* P *sont solutions de l'équation* $X^2 - SX + P = 0$., soit :

$X^2 - eX + 1 = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac = e^2 - 4 > 0$.

Les racines sont $X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2}$.

Comme x et y sont permutables dans $\begin{cases} x + y = e \\ xy = 1 \end{cases}$, on déduit deux couples solutions :

$(x_1 ; y_1) = \left(\dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2} , \dfrac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2}\right)$ et $(x_2 ; y_2) = \left(\dfrac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2} , \dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2}\right)$.

2ème méthode :

$$\begin{cases} x + y = e \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = e - x \\ xy = 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y = e - x \\ x(e - x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e - x \\ ex - x^2 = 1 \end{cases}.$$

Le système initial équivaut à $\begin{cases} x^2 - ex + 1 = 0 \\ y = e - x \end{cases}$.

La résolution de $x^2 - ex + 1 = 0$ a été faite dans la 1ère méthode, soit $\begin{cases} x_1 = \dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2} \\ \text{et} \\ x_2 = \dfrac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2} \end{cases}$.

Les solutions y correspondantes sont $\begin{cases} y_1 = e - x_1 = e - \dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2} = \dfrac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2} = x_2 \\ y_2 = e - x_2 = e - \dfrac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2} = \dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2} = x_1 \end{cases}$.

On retrouve bien :

$(x_1 \,;\, y_1) = \left(\dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2}, \dfrac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2} \right)$ et $(x_2 \,;\, y_2) = \left(\dfrac{e + \sqrt{e^2 - 4}}{2}, \dfrac{e - \sqrt{e^2 - 4}}{2} \right)$.