Déterminer sur quels intervalles les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivées :

a) $\boldsymbol{f(x) = x \ln x}$

$f(x)$ est définie, continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions définies, continue et dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

$f = u.v \Rightarrow f' = u'v + v'u$ avec $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f'(x) = 1.\ln x + x.\dfrac{1}{x} = 1 + \ln x$.

b) $\boldsymbol{f(x) = \ln(2x - 1)}$

f est définie, continue et dérivable sur $]\dfrac{1}{2}\,;+\infty[$ $(2x - 1 > 0)$.

$f = \ln u \Rightarrow f' = \dfrac{u'}{u}$, d'où : $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1}$.

c) $\boldsymbol{f(x) = \ln(e^x - x)}$

f est définie, continue et dérivable pour tout x tel que $e^x - x > 0$.

Etudions $h(x) = e^x - x$ pour en déterminer le signe.

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x)$ indéterminé de forme $\infty - \infty$.

$h(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

$h'(x) = e^x - 1$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$, soit $x = 0$ et $y = h(0) = 1$,

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$,

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

On constate $h(x) = e^x - x \geq 1$ sur $\mathbb{R}$.

On conclue que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f = \ln u \Rightarrow f' = \dfrac{u'}{u}$ avec $(e^x)' = e^x$, d'où : $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.

d) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}}$

f est définie, continue et dérivable si $\ln x$ existe et $\ln x \neq 0$, soit $x > 0$ et $x \neq 1$.

f est définie, continue et dérivable sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{1.\ln x - \dfrac{1}{x}(x-1)}{(\ln x)^2} = \dfrac{x \ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}$.

e) $\boldsymbol{f(x) = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})}$

f est définie si $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Si $x \geq 0$ on déduit $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Si $x < 0$, $x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x|$ soit $\sqrt{x^2 + 1} > -x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

On déduit que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, d'où : $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{(x + \sqrt{x^2 + 1})\sqrt{x^2 + 1}}$,

D'où : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

f) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\ln (1 + x^2)}{x}}$

Comme $1 + x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$, f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, d'où : $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{1 + x^2} . x + 1.\ln (1 + x^2)}{x^2}$,

D'où : $f'(x) = \dfrac{2x^2 + (1 + x^2) \ln (1 + x^2)}{x^2(1 + x^2)}$.

g) $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - (x^2 + 1) \ln (x^2 + 1)}$

Pour les raisons précédentes f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x - [2x \ln (x^2 + 1) + (x^2 + 1).\dfrac{2x}{x^2 + 1}] = 2x - 2x \ln (x^2 + 1) = 2x(1 - \ln (x^2 + 1))$.

h) $\boldsymbol{f(x) = \ln (\sqrt{1 + x} - 1)}$

$f(x)$ est définie si $1 + x \geq 0$, $\sqrt{1 + x} - 1 > 0$ et dérivable si $1 + x > 0$.

$1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$ et $\sqrt{1 + x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + x} > 1$, soit $1 + x > 1$, ce qui impose $x > 0$.

f est définie, continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ d'où : $f'(x) = \dfrac{(\sqrt{1 + x} - 1)'}{\sqrt{1 + x} - 1} = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1 + x}}}{\sqrt{1 + x} - 1} = \dfrac{1}{2\sqrt{1 + x}(\sqrt{1 + x} - 1)}$.