Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{x} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1/ Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction $g : x \to g(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $]-\infty ; 0]$, telle que $f(0) = 0$.

La fonction $h : x \to h(x) = \dfrac{1}{x} e^{-1/x}$ est continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$, donc f est continue sur $]0 ; +\infty[$.

Il reste à étudier la continuité de f en $x = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} e^{-1/x}\right)$ qui est indéterminé de forme $0 \times \infty$.

En effet : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0$.

Changement de variable : Posons $X = \dfrac{1}{x}$, donc si $x \to 0^+$ alors $X \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} e^{-1/x}\right) = \lim\limits_{X \to -\infty} X.e^X = 0$ (croissances comparées).

On conclue : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, soit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 0$.

La fonction f est continue en $x = 0$, donc est continue sur $\mathbb{R}$.

2/ Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction $g : x \to g(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g'(x) = 1$.

Donc f est dérivable sur $]-\infty ; 0[$, telle que $f'_g(0) = g'(0) = 1$.

La fonction $h : x \to h(x) = \dfrac{1}{x} e^{-1/x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$, donc f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Il reste à étudier la dérivabilité de f en $x = 0$, donc à calculer la dérivée de f à droite en $x = 0$:

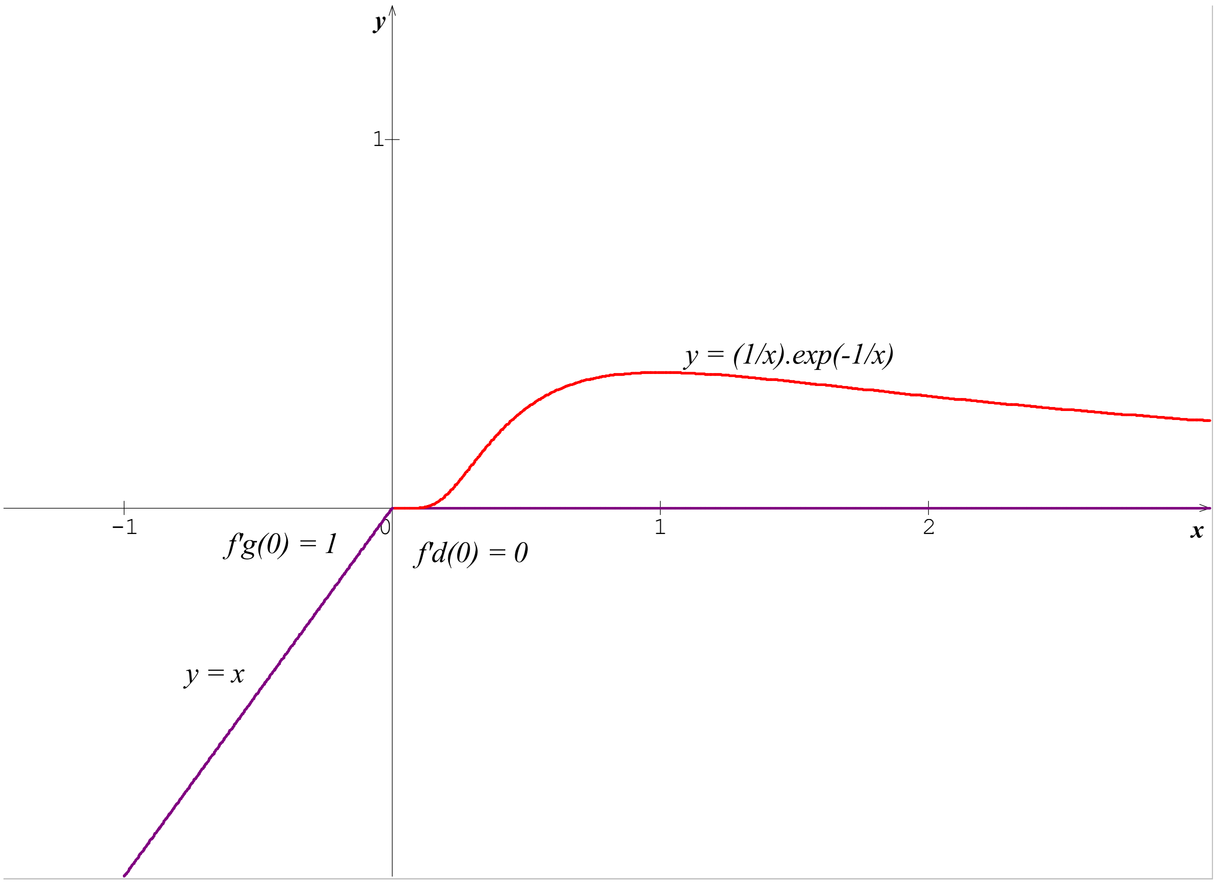
$f'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2} e^{-1/x}\right)$ qui est indéterminé de forme $0 \times \infty$.

Changement de variable : Posons $X = \dfrac{1}{x}$, donc si $x \to 0^+$ alors $X \to -\infty$.

$f'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2} e^{-1/x}\right) = \lim\limits_{X \to -\infty} X^2.e^X = 0$ (croissances comparées).

On conclue : $f'_d(0) = 0$ alors que $f'_g(0) = 1$ (point anguleux).

La fonction f n'est pas dérivable en $x = 0$, donc n'est dérivable que sur $\mathbb{R} - \{0\}$.


y
1
y = (1/x).exp(-1/x)
-1
0
1
2
x
f'g(0) = 1
f'd(0) = 0
y = x