

1/ On considère les suites u , v et w définies sur \mathbf{N} par :

$$u_n = 3n + 1 \quad v_n = \frac{n}{n+1} \quad w_n = -n^2 + 2n - 1.$$

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Les suites u , v et w ont une présentation *fonctionnelle*, ainsi $v_n = \frac{n}{n+1}$ est la traduction sur \mathbf{N} ,

de la fonction $f: x \mapsto f(x) = \frac{x}{x+1}$ sur \mathbf{R} .

Lorsque qu'une suite est sous forme *fonctionnelle*, on peut *directement* calculer chaque terme de la suite.

Ainsi, $u_{125} = 3 \times 125 + 1 = 376$.

$$u_0 = 3 \times 0 + 1 = 1, u_1 = 3 \times 1 + 1 = 4, u_2 = 3 \times 2 + 1 = 7, u_3 = 3 \times 3 + 1 = 10, u_4 = 3 \times 4 + 1 = 13.$$

On peut remarquer que la suite u est arithmétique, de raison $r = +3$.

$$v_0 = \frac{0}{0+1} = 0, v_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, v_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, v_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, v_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}.$$

On peut remarquer que $w_n = -n^2 + 2n - 1 = -(n^2 - 2n + 1)$, soit $w_n = -(n-1)^2$.

$$w_0 = -(0-1)^2 = -1, w_1 = -(1-1)^2 = 0, w_2 = -(2-1)^2 = -1, w_3 = -(3-1)^2 = -4, w_4 = -(4-1)^2 = -9.$$

2/ On considère les suites u , v et w définies sur \mathbf{N} par :

$$u \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases} \quad v : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n+1} \end{cases} \quad w : \begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Les suites u , v et w ont une présentation *récursive*, c'est-à-dire que l'on ne peut calculer chaque terme de la suite qu'en fonction des termes qui le précédent, *de proche en proche*.

$$u_0 = 2, u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7, u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 7 + 1 = 22,$$

$$u_3 = 3u_2 + 1 = 3 \times 22 + 1 = 67, u_4 = 3u_3 + 1 = 3 \times 67 + 1 = 202.$$

$$v_0 = 2, v_1 = \frac{v_0}{v_0+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, v_2 = \frac{v_1}{v_1+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5},$$

$$v_3 = \frac{v_2}{v_2+1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{7}, v_4 = \frac{v_3}{v_3+1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7}+1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{7}} = \frac{2}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{2}{9}.$$

Utilisons $w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1$ sous la forme vue au 1/ : $w_{n+1} = -(w_n - 1)^2$:

$$w_0 = 2, w_1 = -(w_0 - 1)^2 = -(2 - 1)^2 = -1, w_2 = -(w_1 - 1)^2 = -(-1 - 1)^2 = -4,$$

$$w_3 = -(w_2 - 1)^2 = -(-4 - 1)^2 = -25, w_4 = -(w_3 - 1)^2 = -(-25 - 1)^2 = -676.$$