La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = -u_n^2 + 5u_n - 4 \end{cases}$.

1/ Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

$u_1 = -u_0^2 + 5u_0 - 4 = -16 + 20 - 4 = 0$,

$u_2 = -u_1^2 + 5u_1 - 4 = -4$,

$u_3 = -u_2^2 + 5u_2 - 4 = -16 - 20 - 4 = -44$.

2/ Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .

$u_{n+1} - u_n = (-u_n^2 + 5u_n - 4) - u_n = -u_n^2 + 4u_n - 4$,

$u_{n+1} - u_n = -(u_n^2 - 4u_n + 4) = -(u_n - 2)^2$.

On déduit que $u_{n+1} - u_n \leq 0$, soit $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel n .

La suite (u_n) est *décroissante* , ce que l'on pouvait conjecturer sur les premiers termes.

3/ Quelle valeur aurait-il fallu donner à u_0 pour que la suite soit constante ?

(u_n) constante $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} = u_n$ $\Leftrightarrow$ $u_{n+1} - u_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après 2/, on déduit qu'il faut $-(u_n - 2)^2 = 0$, soit $u_n = 2$.

On constate en effet qu'en posant $u_0 = 2$, tous les autres termes de la suite valent 2 , puisque :

$u_n = 2 \Rightarrow u_{n+1} = -u_n^2 + 5u_n - 4 = -4 + 10 - 4 = 2$.