Résoudre dans IR : $x^3 - 4x^2 - 25 \leq 0$.

a) On constate que $x = 5$ est une solution évidente.

$5^3 - 4(5^2) - 25 = 125 - 4\times25 - 25 = 0$.

b) On factorise $x - 5$ en <u>identifiant</u> avec $(x - 5)(ax^2 + bx + c)$.

$(x - 5)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 5a)x^2 + (c - 5b)x - 5c$.

En identifiant au polynôme $x^3 - 4x^2 - 25$ proposé : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 5a = -4 \\ c - 5b = 0 \\ 5c = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 5 \end{cases}$.

Il est important de vérifier que l'équation non utilisée est compatible avec le triplet (a, b, c) obtenu.

L'inéquation devient : $(x - 5)(x^2 + x + 5) \leq 0$.

c) On termine la résolution :

Recherche des racines de $x^2 + x + 5 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = -19 < 0$

Ce trinôme est partout du signe de $a = +1$, soit $x^2 + x + 5 > 0$, pour tout x réel.

On conclue que : $x^3 - 4x^2 - 25 \leq 0$ équivaut à $x - 5 \leq 0$, soit $x \leq 5$.

D'où : $S =]-\infty ; 5]$.