a) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$.

Domaine de définition de $f(x) = \dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$:

$\sqrt{x+3}$ impose $x + 3 \geq 0$, soit $x \geq -3$.

La fraction n'est à priori pas calculable si $2 - \sqrt{x+3} = 0$, soit $\sqrt{x+3} = 2$, soit $x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = +1$.

Le domaine de définition semble donc être $[-3 ; +1[\cup]+1 ; +\infty[$.

Or, on constate que le numérateur s'annule également en $x = +1$.

$f(1) = \dfrac{0}{0}$ est une *forme indéterminée*, ce qui signifie que $f(1)$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle (tout l'inverse de ne pas être défini).

Le domaine de définition est donc $[-3 ; +\infty[$.

Il reste à donner une unique valeur à $f(1)$.

La plus judicieuse valeur de $f(1)$ est celle qui assure la *continuité* de f en $x = +1$, son calcul étant le résultat de $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$.

Si le dénominateur de cette fraction avait été un polynôme, le fait qu'il s'annule en $x = +1$ aurait permis la factorisation de $x - 1$, puis la simplification de $\dfrac{x-1}{x-1}$ à l'origine de l'indétermination.

Afin de permettre cette factorisation, il faut enlever la racine du dénominateur, à l'aide de sa *quantité conjugée* $2 + \sqrt{x+3}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{4-(x+3)} = -\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = -\lim_{x \to 1} (2+\sqrt{x+3}) = -(2+2) = -4 .$$

En posant $f(1) = -4$, on assure la continuité de f en $x = +1$.

On peut ajouter que le fait d'avoir ainsi défini f *en* $x = +1$ *, permet de remplacer l'écriture* $f(x) = \dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$ *par* $f(x) = 2 + \sqrt{x+3}$ (les deux fonctions ne différaient que par leur valeur en $x = +1$).

Conclusion : Ecrire $\begin{cases} f(1) = -4 \\ f(x) = \dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} \text{ pour tout } x \neq +1 \end{cases}$, de domaine de définition $D_f = [-3 ; +\infty[$ est équivalent à écrire $f(x) = 2 + \sqrt{x+3}$ pour tout $x \in [-3 ; +\infty[$.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ **.**

Domaine de définition de $f(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$:

$\sqrt{x}$ impose $x \geq 0$.

La fraction n'est à priori pas calculable si $\sqrt{x} - 1 = 0$, soit $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = +1$.

Le domaine de définition semble donc être $[0 ; +1[\cup]+1 ; +\infty[$.

Or, on constate que le numérateur s'annule également en $x = +1$.

$f(1) = \dfrac{0}{0}$ est une *forme indéterminée*, et $f(1)$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

Le domaine de définition est donc $[0 ; +\infty[$.

Il reste à donner une unique valeur à $f(1)$.

La plus judicieuse valeur de $f(1)$ est celle qui assure la *continuité* de f en $x = +1$, son calcul est le résultat de $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

Si le dénominateur de cette fraction avait été un polynôme, le fait qu'il s'annule en $x = +1$ aurait permis la factorisation de $x - 1$, puis la simplification de $\dfrac{x-1}{x-1}$ à l'origine de l'indétermination.

Afin de permettre cette factorisation, il faut enlever la racine du dénominateur, à l'aide de sa *quantité conjuguée* $\sqrt{x} + 1$.

$$\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(x^2 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x^2\sqrt{x} + x^2 - x - \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{(x^2\sqrt{x} - \sqrt{x}) + (x^2 - x)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x}(x^2 - 1) + x(x - 1)}{x - 1} = (x + 1)\sqrt{x} + x .$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} [(x + 1)\sqrt{x} + x] = 3 .$$

En posant $f(1) = 3$, on assure la continuité de f en $x = +1$.

Le fait d'avoir ainsi défini f *en* $x = +1$ *, permet de remplacer l'écriture* $f(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ *par* $f(x) = (x + 1)\sqrt{x} + x$, (les deux fonctions ne différaient que par leur valeur en $x = +1$).

Conclusion : Ecrire $\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(x) = (x + 1)\sqrt{x} + x \text{ si } x \neq +1 \end{cases}$, de domaine de définition $D_f = [-3 ; +\infty[$ est équivalent à écrire $f(x) = (x + 1)\sqrt{x} + x$ pour tout $x \in [0 ; +\infty[$.