Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}$.

1/ Préciser son domaine de définition et de dérivabilité.

$f(x)$ est définie sauf si $x^2 + x + 1 = 0$, qui admet $\Delta = b^2 - 4ac = -3 < 0$.

Le dénominateur n'admet pas de racine, donc f est partout définie sur $\mathbb{R}$.

Tout rapport de polynômes est partout dérivable sur son domaine de définition, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2/ Déterminer sa dérivée $f'(x)$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, soit : $f'(x) = \dfrac{(2x + 1)(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(x^2 + x + 2)}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{(2x + 1)[(x^2 + x + 1) - (x^2 + x + 2)]}{(x^2 + x + 1)^2}$,

D'où : $f'(x) = \dfrac{-(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{-2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$.

3/ Etablir son tableau de variation.

Recherche des extremum : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

L'extremum est d'ordonnée $y = f(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \dfrac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}} = +\dfrac{7}{3}$, soit $E(-\dfrac{1}{2} ; +\dfrac{7}{3})$.

Signe de la dérivée : Le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-2x - 1$		+	0	–	
$(x^2 + x + 1)^2$		+	|	+	
$\boldsymbol{f'(x)}$		**+**	**0**	**–**	

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		↗	7/3	↘	

Voir la courbe ci-dessous.

4/ Donner l'équation de la tangente T à sa courbe représentative C en son point d'abscisse $x = +1$.

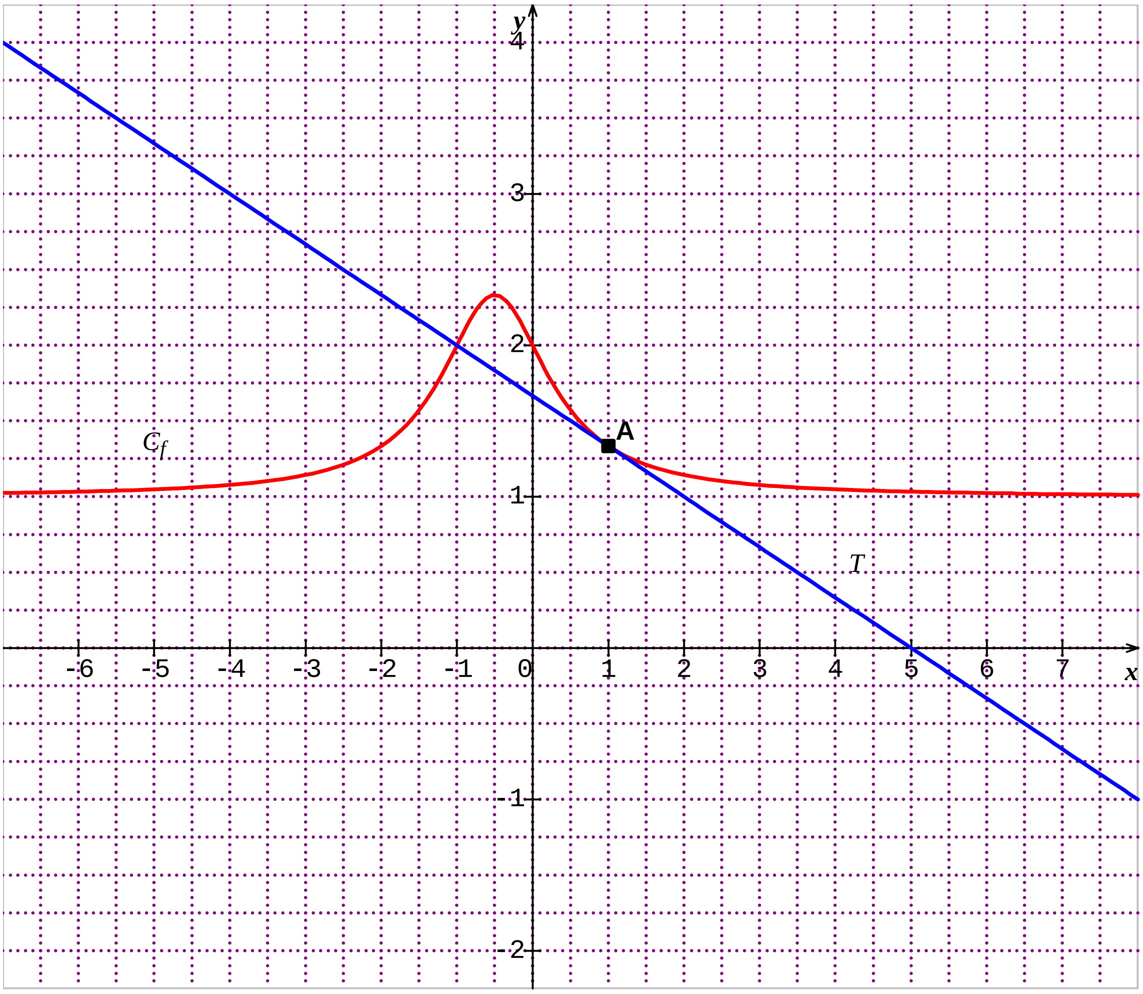
L'équation de la tangente à C_f en $x = a$ est : T_a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Donc : $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f'(1) = \dfrac{-2 - 1}{(1 + 1 + 1)^2} = -\dfrac{3}{9} = -\dfrac{1}{3}$ et $f(1) = \dfrac{1 + 1 + 2}{1 + 1 + 1} = +\dfrac{4}{3}$.

T : $y = -\dfrac{1}{3}(x - 1) + \dfrac{4}{3}$.

Il faut ramener l'équation de T à la forme d'une équation réduite de droite $y = ax + b$:

T : $y = -\dfrac{1}{3}(x - 1) + \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}$, soit $\boldsymbol{T : y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}}$.



y
x
4
3
2
1
-1
-2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
C_f
A
T