Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après en avoir donné le domaine de définition :

a) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}}$ **.**

$e^x > 0$ pour tout x réel $\Rightarrow$ $e^x + 1 > 1$, donc jamais nul. La fraction existe pour tout x réel, soit $D_f = \mathbb{R}$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec $(e^x)' = e^x$.

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.

Sachant $e^x > 0$, pour tout x réel, on déduit $f'(x) > 0$, soit f partout *strictement croissante*.

b) $\boldsymbol{g(x) = 3e^{2x} - e^{-x}}$ **.**

e^u est défini pour tout u réel, donc $g(x)$ définie pour tout x réel, soit $D_g = \mathbb{R}$.

On sait : $(e^u)' = u'.e^u$, d'où : $\begin{cases} (e^{2x})' = 2e^{2x} \\ (e^{-x})' = (-1)e^{-x} = -e^{-x} \end{cases}$.

D'où : $g'(x) = 3(2e^{2x}) - (-e^{-x}) = 6e^{2x} + e^{-x}$.

Sachant $e^u > 0$, pour tout x réel, on déduit $g'(x) > 0$, soit g partout *strictement croissante*.

c) $\boldsymbol{h(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-2x}}}$ **.**

$h(x)$ est partout définie, sauf si $1 - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = 1$.

On sait que $e^A = 1 \Leftrightarrow A = 0$, soit ici $-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, valeur interdite. Donc : $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$.

On sait $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ et $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$, d'où : $h'(x) = -\dfrac{-2e^{-2x}}{(1 - e^{-2x})^2} = \dfrac{2e^{-2x}}{(1 - e^{-2x})^2}$.

Sachant $e^u > 0$, pour tout x réel, on déduit $h'(x) > 0$, soit h partout *strictement croissante*.