

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après en avoir donné le domaine de définition :

a)  $f(x) = xe^{2x}$ .

$e^a$  est défini pour tout  $a$  réel, donc  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs  $(e^u)' = u'e^u \Rightarrow (e^{2x})' = 2e^{2x}$ .

$(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow (xe^{2x})' = 1.e^{2x} + x.(2)e^{2x} = (2x + 1)e^{2x}$ .

b)  $g(x) = xe^{-x^2}$ .

$e^a$  est défini pour tout  $a$  réel, donc  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs  $(e^u)' = u'e^u \Rightarrow (e^{-x^2})' = -2x.e^{-x^2}$ .

$(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow (xe^{-x^2})' = 1.e^{-x^2} + x.(-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$ .

c)  $h(x) = (e^x - e^{-x})^2$ .

$e^x$  et  $e^{-x}$  sont définis pour tout  $x$  réel, donc  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1<sup>ère</sup> méthode : Sans développer (meilleur).

On sait  $(U^2)' = 2U.U'$  et  $(e^u)' = u'e^u$ .

$h(x) = (e^x - e^{-x})^2 \Rightarrow h'(x) = 2(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})' = 2(e^x - e^{-x})(e^x - (-1)e^{-x}) = 2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$ .

On peut compléter en utilisant  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ .

$h'(x) = 2(e^{2x} - e^{-2x})$ .

2<sup>ème</sup> méthode : En développant.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow h(x) = (e^x - e^{-x})^2 = (e^x)^2 - 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2$ .

On sait :  $e^a \times e^b = e^{a+b}$  et  $(e^a)^b = e^{a \times b}$ .

$h(x) = (e^x - e^{-x})^2 = (e^x)^2 - 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2 = e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x} = e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}$ , avec  $e^0 = 1$ .

$h(x) = e^{2x} - 2 + e^{-2x} \Rightarrow h'(x) = 2e^{2x} - 0 + (-2)e^{-2x} = 2e^{2x} - 2e^{-2x} = 2(e^{2x} - e^{-2x})$ .

d)  $k(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x}$ .

On sait  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ .

$k(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x} \Rightarrow k'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})'.x - 1.(e^x + e^{-x})}{x^2} = \frac{[e^x + (-1)e^{-x}].x - (e^x + e^{-x})}{x^2} = \frac{(e^x - e^{-x}).x - (e^x + e^{-x})}{x^2}$ ,

$k'(x) = \frac{(x-1)e^x - (x+1)e^{-x}}{x^2}$ .

Autre présentation, en multipliant le numérateur et le dénominateur par  $e^x$  :

$k'(x) = \frac{(x-1)e^{2x} - (x+1)}{x^2 e^x}$ , ou encore :  $k'(x) = \frac{x(e^{2x} - 1) - (e^{2x} + 1)}{x^2 e^{2x}}$ .