Soit dans un repère orthonormé $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$, le point $A(0\,;\,-2)$ et la droite D d'équation cartésienne $2x - y + 1 = 0$.

a) Donner une équation cartésienne de la droite D' passant par A , parallèle à D .

1ère méthode :

On sait que la droite $ax + by + c = 0$ admet $\overrightarrow{u}(-b\,;\,a)$ pour vecteur directeur.

Deux droites parallèles ont même direction. Leurs équations cartésiennes sont de forme $\begin{cases} D : ax + by + c = 0 \\ D' : (ka)x + (kb)y + c' = 0 \end{cases}$.

On peut considérer que deux droites parallèles admettent des équations cartésiennes de même début $ax + by$, seul le terme constant c ou c' étant éventuellement différent.

$D : 2x - y + 1 = 0$ impose $D' : 2x - y + c' = 0$.

Imposons $A(0\,;\,-2) \in D'$, soit $2(0) - (-2) + c' = 0 \Leftrightarrow c = -2$.

On déduit : $D' : 2x - y - 2 = 0$, équation vérifiée par tous les points de cette droite.

2ème méthode :

On sait que la droite $ax + by + c = 0$ admet $\overrightarrow{u}(-b\,;\,a)$ pour vecteur directeur.

$D : 2x - y + 1 = 0$ admet donc $\overrightarrow{u}(1\,;\,2)$ pour vecteur directeur.

D' étant parallèle à D , elle admet également $\overrightarrow{u}(1\,;\,2)$ pour vecteur directeur.

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}(a\,;\,b)$ et $\overrightarrow{v}(a'\,;\,b')$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{v} = k\,\overrightarrow{u}$, avec k réel , ou encore :

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}(a\,;\,b)$ et $\overrightarrow{v}(a'\,;\,b')$ sont colinéaires si et seulement si $ab' - ba' = 0$ (déterminant nul).

Tout point $M(x\,;\,y)$ de la droite D' doit vérifier $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{u}$, soit $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ colinéaires.

$\overrightarrow{AM}(x - 0\,;\,y - (-2)) = (x\,;\,y + 2)$ et $\overrightarrow{u}(1\,;\,2)$ colinéaires $\Leftrightarrow ab' - ba' = 0 \Leftrightarrow 2x - 1(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$.

On retrouve l'équation cartésienne $D' : 2x - y - 2 = 0$.

b) Déterminer le point d'intersection de la droite D' avec l'axe des ordonnées $y'y$.

$M(x\,;\,y) \in D' \cap y'y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \text{ car } M \text{ appartient à } D \\ x = 0 \text{ car } M \text{ appartient à } y'y \end{cases}$, soit $2(0) - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = +2$.

On déduit que $D' \cap y'y = \{B(0\,;\,2)\}$.