Soit dans un repère orthonormé $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$, les points $A(1\ ;\ 1)$, $B(3\ ;\ 3)$ et $C(5\ ;\ 2)$.

Déterminer une équation cartésienne de la hauteur D du triangle ABC , issue du sommet B .

La hauteur issue de B est perpendiculaire au côté (AC) , de direction $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\ ;\ y_C - y_A) = (4\ ;\ 1)$.

Tout point $M(x\ ;\ y)$ de la hauteur D vérifie $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$, soit $\overrightarrow{BM}\ .\ \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

$\overrightarrow{BM}\ (x_M - x_B\ ;\ y_M - y_B) = (x - 3\ ;\ y - 3)$, d'où : $aa' + bb' = 4(x - 3) + 1(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 4x + y - 15 = 0$.

On déduit que la hauteur issue de B admet pour équation cartésienne $D : 4x + y - 15 = 0$.

Remarque :

Cherchons les coordonnées du pied H de la hauteur précédente.

Tout point $M(x\ ;\ y)$ du côté $[AC]$ vérifie $(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AC})$ colinéaires, soit $ab' - ba' = 0$.

$\overrightarrow{AM}(x - 1\ ;\ y - 1)$ et $\overrightarrow{AC}(4\ ;\ 1)$, donc $ab' - ba' = (x - 1) - 4(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 3 = 0$.

Le côté $[AB]$ admet pour équation cartésienne $D' : x - 4y + 3 = 0$.

$H(x_H\ ;\ y_H) \in D \cap D' \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 15 = 0 \\ x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 15 \\ x - 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x + 4y = 60 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$, soit par addition $17x = 57$.

On déduit $x_H = +\dfrac{57}{17}$, que l'on reporte dans $4x + y = 15 \Leftrightarrow \dfrac{228}{17} + y = \dfrac{255}{17} \Leftrightarrow y_H = +\dfrac{27}{17}$.

On déduit $H(+\dfrac{57}{17}\ ;\ +\dfrac{27}{17})$.