Soit dans un repère orthonormé $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$, les points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 4)$ et $C(1\ ;\ 0)$.

Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du cercle circonscrit au triangle ABC .

L'*orthocentre* du triangle ABC est le point de concours commun aux hauteurs des trois côtés du triangle.

Pour déterminer H , il suffit de chercher deux équations de hauteur de ces côtés, et d'en déterminer l'intersection.

La hauteur relative à un côté est la perpendiculaire à ce côté menée par le sommet opposé.

- <u>Soit D_1 la hauteur issue de</u> A :

$M(x\ ;\ y) \in D_1 \iff (AM) \perp (BC) \iff \overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{BC} = 0 \iff aa' + bb' = 0$.

$\overrightarrow{AM}\ (x_M - x_A\ ;\ y_M - y_A) = (x + 1\ ;\ y - 2)$ et $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B\ ;\ y_C - y_B) = (-2\ ;\ -4)$.

$\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{BC} = 0 \iff aa' + bb' = 0 \iff -2(x + 1) - 4(y - 2) = 0 \iff (x + 1) + 2(y - 2) = 0 \iff x + 2y - 3 = 0$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de A est $D_1 : x + 2y - 3 = 0$.

- <u>Soit D_2 la hauteur issue de</u> B :

$M(x\ ;\ y) \in D_2 \iff (BM) \perp (AC) \iff \overrightarrow{BM}\ .\ \overrightarrow{AC} = 0 \iff aa' + bb' = 0$.

$\overrightarrow{BM}\ (x_M - x_B\ ;\ y_M - y_B) = (x - 3\ ;\ y - 4\ )$ et $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\ ;\ y_C - y_A) = (2\ ;\ -2)$.

$\overrightarrow{BM}\ .\ \overrightarrow{AC} = 0 \iff aa' + bb' = 0 \iff 2(x - 3) - 2(y - 4) = 0 \iff (x - 3) - (y - 4) = 0 \iff x - y + 1 = 0$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de B est $D_2 : x - y + 1 = 0$.

- <u>Soit $H(x\ ;\ y)$ le point d'intersection des hauteurs D_1 et D_2</u> :

$H(x\ ;\ y) \in D_1 \cap D_2 \iff \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$, soit $3y = 4$ par addition.

D'où $y_H = +\dfrac{4}{3}$ que l'on reporte dans $x_H - y_H = -1$: $x_H - \dfrac{4}{3} = -1 \iff x_\Omega = +\dfrac{1}{3}$.

On déduit $H(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{4}{3}\ )$.