

Soit dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , les points $A(-2; -1)$, $B(1; 3)$ et $C(2; 0)$.

Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC .

Le centre de gravité d'un triangle est le point de concours commun aux trois médianes du triangles, droites issues de chaque sommet, passant par le milieu du côté opposé.

1^{ère} méthode :

On cherche une équation cartésienne de deux médianes, dont on cherche ensuite le point de concours G .

- Soit D_1 la médiane issue de A passant par le milieu A' du côté $[BC]$:

$$A' \text{ milieu de } [BC] \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+2}{2} = +\frac{3}{2} \\ y_{A'} = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3+0}{2} = +\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ soit } A'(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}).$$

Tout point $M(x; y)$ de la médiane D_1 vérifie $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AA'})$ colinéaires $\Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

$$\overrightarrow{AM}(x_M - x_A; y_M - y_A) = (x + 2; y + 1) \text{ et } \overrightarrow{AA'}(x_{A'} - x_A; y_{A'} - y_A) = (\frac{7}{2}; \frac{5}{2}).$$

$$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AA'}) \text{ colinéaires } \Leftrightarrow ab' - ba' = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}(x + 2) - \frac{7}{2}(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}y + \frac{3}{2} = 0.$$

La médiane D_1 admet pour équation cartésienne $D_1 : 5x - 7y + 3 = 0$.

- Soit D_2 la médiane issue de C passant par le milieu C' du côté $[AB]$:

$$C' \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_{C'} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = +1 \end{cases}, \text{ soit } C'(-\frac{1}{2}; 1).$$

Tout point $M(x; y)$ de la médiane D_2 vérifie $(\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CC'})$ colinéaires $\Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

$$\overrightarrow{CM}(x_M - x_C; y_M - y_C) = (x - 2; y) \text{ et } \overrightarrow{CC'}(x_{C'} - x_C; y_{C'} - y_C) = (-\frac{5}{2}; 1).$$

$$(\overrightarrow{CM}; \overrightarrow{CC'}) \text{ colinéaires } \Leftrightarrow ab' - ba' = 0 \Leftrightarrow 1(x - 2) + \frac{5}{2}y = 0 \Leftrightarrow x + \frac{5}{2}y - 2 = 0.$$

La médiane D_2 admet pour équation cartésienne $D_2 : 2x + 5y - 4 = 0$.

- Soit $G(x; y)$ l'intersection de D_1 et D_2 , centre de gravité du triangle ABC :

$$G(x; y) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 7y + 3 = 0 \\ 2x + 5y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 7y = -3 \\ 2x + 5y = +4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x + 14y = 6 \\ 10x + 25y = 20 \end{cases}, \text{ soit par addition } 39y_G = 26.$$

$$D'où y_G = +\frac{26}{39} = +\frac{2}{3}, \text{ que l'on reporte dans } 2x + 5y = 4 \Leftrightarrow 2x + \frac{10}{3} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow y_G = +\frac{1}{3}.$$

$$\text{On déduit : } G(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}).$$

2^{ème} méthode :

Le centre de gravité G est situé au tiers de chaque médiane en partant de sa base, donc aux $\frac{2}{3}$ de cette médiane en partant

$$\text{de son sommet, soit } \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - x_C = \frac{2}{3}(x_{C'} - x_C) \\ y_G - y_C = \frac{2}{3}(y_{C'} - y_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - 2 = \frac{2}{3}(-\frac{5}{2}) \\ y_G = \frac{2}{3}(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 - \frac{5}{3} = +\frac{1}{3} \\ y_G = +\frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$\text{On retrouve } G(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}).$$