Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}$ **.**

$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)} = \frac{\ln 1}{\ln 1} = \frac{0}{0}$, forme indéterminée qu'il faut lever.

On constate qu'en reportant $x = 0$ dans $\ln(1+x)$, on obtient 1 , valeur dans le domaine de $\ln x$ et non aux bornes de ce domaine. Il faut se rapprocher de $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+2x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\ln(1+2x)} = \frac{1}{2} \frac{\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}}{\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x}} .$$

Or : $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$, en posant $h = x$ puis $h = 2x$.

On déduit : $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)} = \frac{1}{2}$.

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x-1}$ **.**

On sait $\displaystyle \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\displaystyle \lim_{x \to 0} (x-1) = -1$, d'où : $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x-1} = +\infty$.