

Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir précisé leur domaine de définition :

a) $f(x) = (\ln x)^2$.

$\ln x$ est calculable si et seulement si (ssi) $x > 0$, soit $D_f =]0 ; +\infty[$.

On sait que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $(u^2)' = 2uu'$.

D'où : $f'(x) = 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$.

b) $f(x) = \ln(\ln x)$.

$\ln x$ est calculable ssi $x > 0$ et $\ln(\ln x)$ calculable si $\ln x > 0$, soit $x > 1$, d'où : $D_f =]1 ; +\infty[$.

On sait $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, d'où : $f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$.

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

$f(x)$ est calculable ssi $\frac{x+1}{x-1}$ est calculable, soit $x \neq 1$, et $\frac{x+1}{x-1} > 0$, soit $D_f =]-\infty ; -1[\cup]+1 ; +\infty[$.

On sait $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, soit $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}$.

On déduit : $f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = -\frac{1}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x^2 - 1}$.

d) $f(x) = (2x+1) \cdot e^{-3x}$.

$f(x)$ est calculable pour tout x réel, soit $D_f = \mathbb{R}$.

$(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^u)' = u' \cdot e^u$, soit $(e^{-3x})' = -3e^{-3x}$.

$f'(x) = 2 \cdot e^{-3x} + (2x+1)(-3) \cdot e^{-3x} = [2 - 3(2x+1)] \cdot e^{-3x} = (-6x-1) \cdot e^{-3x} = -(6x+1) \cdot e^{-3x}$.

e) $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$.

$f(x)$ est calculable ssi $e^{2x} - 1 \neq 0$, soit $e^{2x} \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq \ln 1 \Leftrightarrow 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. On conclue $D_f = \mathbb{R}^*$.

On sait $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ et $(e^u)' = u' \cdot e^u$, soit $(e^{2x})' = 2e^{2x}$.

$f'(x) = \frac{(2e^{2x})(e^{2x}-1) - (2e^{2x})(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{2e^{2x}(e^{2x}-1-e^{2x}-1)}{(e^{2x}-1)^2} = -4 \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$.

f) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$.

$f(x)$ est calculable pour tout x réel, soit $D_f = \mathbb{R}$.

$(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^u)' = u' \cdot e^u$, soit $(e^{-x^2})' = -2x \cdot e^{-x^2}$.

$f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot (-2x \cdot e^{-x^2}) = (2x - 2x^3) \cdot e^{-x^2} = 2x(1 - x^2) \cdot e^{-x^2}$.