Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x \ln (x + 1) + 3 > \ln (x + 1) + 3x$.

$\ln (x + 1)$ n'est défini que si $x + 1 > 0$, soit $x > -1$. On déduit $D =]-1 ; +\infty[$.

On essaie de regrouper les termes $\ln (x + 1)$, en les factorisant :

$x \ln (x + 1) + 3 > \ln (x + 1) + 3x \Leftrightarrow x \ln (x + 1) - \ln (x + 1) > 3x - 3 \Leftrightarrow (x - 1) \ln (x + 1) > 3 (x - 1)$.

Attention à ne pas simplifier abusivement par $x - 1$ *, son signe influençant le sens de l'inéquation* :

1er cas : $x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$.

La simplification par $x - 1$ change le sens de l'inéquation : $\ln (x - 1) < 3 \Leftrightarrow x - 1 < e^3 \Leftrightarrow x < e^3 + 1$,

soit $x < 21,08$ alors que l'on travaille dans l'intervalle $]-1 ; 1[$.

Tout l'intervalle $]-1 ; 1[$ est solution.

2ème cas : $x = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 0$.

L'inéquation devient $0 > 0$, inéquation fausse, donc $x = 0$ n'est pas solution.

3ème cas : $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$.

La simplification par $x - 1$ ne change pas le sens de l'inéquation : $\ln (x - 1) > 3 \Leftrightarrow x - 1 > e^3 \Leftrightarrow x > e^3 + 1$,

soit $x > 21,08$ alors que l'on travaille dans l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

Tout l'intervalle $]e^3 +1 ; +\infty[$ est solution.

Conclusion : $S =]-1 ; 1[\cup]e^3 + 1 ; +\infty[$.

Remarque : Pour justifier $\ln (x - 1) > 3 \Leftrightarrow x - 1 > e^3$, il faut rappeler que la fonction $f(x) = e^x$ est *continue* et *strictement croissante* , donc conserve les ordres, soit $a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$.

Détail : $\ln (x - 1) > 3 \Leftrightarrow e^{\ln (x - 1)} > e^3$, pour les raisons invoquées $\Leftrightarrow x - 1 > e^3$.