On sait que $\ln a + \ln b = \ln (ab)$, or les deux équations suivantes n'ont pas le même ensemble de solutions.
Donner l'explication de ce paradoxe, et résoudre chacune de ces équations.

E_1 **:** $\ln (x - 1) + \ln (x + 4) = \ln 6$ **.**

E_2 **:** $\ln [(x - 1)(x + 4)] = \ln 6$ **.**

En effet, comme on le verra plus bas, l'équation E_1 admet $S_1 = \{+2\}$ pour ensemble solution, alors que l'équation E_2 admet $S_2 = \{-5 ; +2\}$ pour ensemble solution.

La raison est que ces deux équations n'admettent pas le même domaine de définition.

En effet : $\ln a + \ln b$ impose <u>simultanément</u> $a > 0$ et $b > 0$,

tandis que $\ln (ab)$ impose le produit $ab > 0$, donc tout autant $a > 0$ et $b > 0$ simultanément, que $a < 0$ et $b < 0$ simultanément.

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln (x - 1) + \ln (x + 4) = \ln 6$.

Toujours commencer par le domaine de définition : Simultanément $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > +1$ <u>et</u> $x > -4$.

On déduit $D_1 =]+1 ; +\infty[$.

On sait que $\ln a + \ln b = \ln (ab)$, d'où : $\ln [(x - 1)(x + 4)] = \ln 6$

D'où : $(x - 1)(x + 4) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$, de racines $x_1 = -5$ et $x_2 = +2$.

Seule $x_2 = +2$ appartient au domaine D_1 , d'où : $S_1 = \{+2\}$.

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln [(x - 1)(x + 4)] = \ln 6$.

Le domaine de définition impose $(x - 1)(x + 4) > 0$, soit $D_2 =]-\infty ; -4[\cup]+1 ; +\infty[$.

$\ln [(x - 1)(x + 4)] = \ln 6 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 4) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$, de racines $x_1 = -5$ et $x_2 = +2$.

Les deux racines appartiennent au domaine D_2 , d'où : $S_2 = \{-5 ; +2\}$.

<u>Remarque</u> :

On peut remplacer $\ln a + \ln b$ par $\ln (ab)$ car l'écriture préalable de $\ln a + \ln b$ impose $a > 0$ et $b > 0$.

Par contre $\ln (ab)$ ne peut être remplacé par $\ln a + \ln b$ que si $a > 0$ et $b > 0$.

Si $a < 0$ simultanément avec $b < 0$, on a bien $ab > 0$.

On peut alors écrire $\ln (ab) = \ln (-a) + \ln (-b)$ ou encore $\ln (ab) = \ln |a| + \ln |b|$.