

Soit  $u$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$ .

1/ Vérifier que la suite  $u$  est à termes positifs.

Soit la proposition de récurrence  $P_n : \langle u_n > 0 \rangle$ .

- *Initialisation* :  $P_0$  est vraie, car  $u_0 = 1 > 0$ .

- *Hérédité* : Supposons  $P_n$  vraie ( $u_n > 0$ ), peut-on en déduire  $P_{n+1}$  vraie ( $u_{n+1} > 0$ ) ?

$$u_n > 0 \Rightarrow \frac{2u_n}{2+3u_n} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0. \text{ On conclue que } P_{n+1} \text{ est vraie, sous réserve que } P_n \text{ le soit.}$$

- *Conclusion* :  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $u_n > 0$ .

2/ Montrer que la suite  $u$  est décroissante. Que peut-on en déduire ?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2+3u_n} - u_n = \frac{2u_n}{2+3u_n} - \frac{u_n(2+3u_n)}{2+3u_n} = \frac{2u_n}{2+3u_n} - \frac{2u_n+3u_n^2}{2+3u_n} = -\frac{3u_n^2}{2+3u_n} < 0.$$

On conclue  $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La suite  $u$  est décroissante.

La suite  $u$  étant décroissante, minorée par 0, est convergente vers  $L \geq 0$ .

3/ Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

Soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ . La relation de récurrence  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$ , devient pour  $n \rightarrow +\infty$  :  $L = \frac{2L}{2+3L}$ ,

$$2L + 3L^2 = 2L \Leftrightarrow L^2 = 0, \text{ soit } L = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$