

1/ Résoudre dans \mathbb{R} : $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.

Equation bicarrée : Soit $X = x^2$, d'où $X^2 = (x^2)^2 = x^4$.

L'équation devient : $X^2 - 7X - 18 = 0$, avec $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4(1)(-18) = 49 + 72 = 121 = 11^2 > 0$.

$$\text{D'où deux racines } \begin{cases} X' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - 11}{2} = -2 \\ X'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + 11}{2} = +9 \end{cases} .$$

Comme $X = x^2 \geq 0$, seule la possibilité $X = x^2 = +9$ subsiste, soit $x_1 = -3$ et $x_2 = +3$.

$$S = \{-3 ; +3\} .$$

2/ Résoudre dans \mathbb{R} : $\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + 1 = 0$.

Soit $X = \frac{1}{x-1}$, ce qui impose $x \neq 1$.

L'équation devient : $2X^2 - 3X + 1 = 0$, avec $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1 > 0$.

$$\text{D'où deux racines } \begin{cases} X' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 1}{4} = +\frac{1}{2} \\ X'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 1}{4} = +1 \end{cases} .$$

$$\text{Comme } X = \frac{1}{x-1} , \text{ on déduit } \begin{cases} \frac{1}{x-1} = +\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = +2 \Leftrightarrow x = +3 \\ \frac{1}{x-1} = +1 \Leftrightarrow x-1 = +1 \Leftrightarrow x = +2 \end{cases} .$$

$$S = \{+3 ; +2\} .$$