Discuter suivant m réel le nombre de racines de l'équation E_m : $mx^2 + (m - 1)x - 4m = 0$.

a) Cas particulier : $m = 0$, l'équation $E_0 : 0x^2 + (0 - 1)x - 4(0) = 0$, soit $E_0 : -x = 0$

L'équation E_0 admet une solution unique $x = 0$, soit $S_0 = \{0\}$.

b) Cas général : $m \neq 0$. Les équations E_m correspondantes sont du second degré.

Le signe de leur discriminant Δ_m (chacune a son propre discriminant) détermine leur nombre de racines.

$\Delta_m = b^2 - 4ac = (m - 1)^2 + 16m^2 > 0$, quel que soit $m \neq 0$.

En effet, une somme de carrés est positive.

On peut conclure que toutes ces équations E_m admettent chacune deux racines réelles.

On peut préciser $\begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta_m}}{2a} = \dfrac{1 - m - \sqrt{(m-1)^2 + 16m^2}}{2m} \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta_m}}{2a} = \dfrac{1 - m + \sqrt{(m-1)^2 + 16m^2}}{2m} \end{cases}$.

Remarque 1 : Pour $m = 0$, ces solutions ne seraient pas calculable (m au dénominateur).

Remarque 2 : $\begin{cases} S_m = x' + x'' = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{1 - m}{m} \text{ , change de valeur pour chaque valeur de } m \\ P_m = x'.x'' = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-4m}{m} = -4 \text{ , est le même pour chaque équation.} \end{cases}$.