Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 + 6x + 5} \leq x + 2$.

Conditions d'existence : La racine carrée impose $x^2 + 6x + 5 \geq 0$.

De plus, le résultat d'une racine étant toujours positif ou nul, il faut aussi imposer $x + 2 \geq 0$.

Le trinôme $x^2 + 6x + 5$ vérifie $a - b + c = 0$, donc admet pour racines $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a} = -5$.

Comme $a = +1$, ce trinôme est du signe de a , donc positif à l'extérieur de ses racines.

On déduit que le domaine de définition est : $D =]-\infty\,;\,-5] \cup [-1\,;\,+\infty[$.

La seconde contrainte est $x + 2 \geq 0$, soit $x \geq -2$.

On conclue que le domaine d'existence ce l'inéquation est $E = [-1\,;\,+\infty[$.

On doit résoudre $0 \leq \sqrt{x^2 + 6x + 5} \leq x + 2$.

La mise au carré conserve l'ordre des nombres positifs, d'où : $x^2 + 6x + 5 \leq (x + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 \leq x^2 + 4x + 4$,

soit $2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$.

En tenant compte du domaine d'existence, on conclue : $S = [\,-1\,;\,-\frac{1}{2}\,]$.