On considère la suite (u_n) d'entier naturels définie par : $u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$, pour tout entier naturel n .

1-a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

$u_1 = 5u_0 - 6 = 70 - 6 = 64$,

$u_2 = 5u_1 - 6 = 320 - 6 = 314$,

$u_3 = 5u_2 - 6 = 1570 - 6 = 1564$,

$u_4 = 5u_3 - 6 = 7820 - 6 = 7814$,

$u_5 = 5u_4 - 6 = 39070 - 6 = 39064$. (ajouté pour avoir 3 cas d'indice pair, et 3 cas d'indice impair).

b) Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de l'écriture de u_n ?

Il semble que si n est pair, les deux derniers chiffres soient 14, et si n est impair, qu'ils soient 64 .

2-a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} \equiv u_n$ (mod. 4) .

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 \Leftrightarrow u_{n+2} = 25u_n - 36 = 4(6u_n - 9) + u_n = u_n + 4K$, avec K entier naturel.

On déduit $u_{n+2} \equiv u_n$ (mod. 4) .

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_{2k} \equiv 2$ (mod. 4) et $u_{2k+1} \equiv 0$ (mod. 4).

Si n est pair, on pose $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}$:

$u_{n+2} \equiv u_n$ (mod. 4) $\Rightarrow$ $u_{2k} \equiv u_{2k-2}$ (mod.4) $\equiv u_{2k-4}$ (mod.4) …. $\equiv u_0$ (mod.4) $\equiv 2$ (mod.4) , puisque $u_0 = 14$.

Démonstration rigoureuse, par récurrence :

Soit la proposition P_k : $u_{2k} \equiv 2$ (mod. 4) .

a) *Initialisation* : P_0 est vraie car $u_0 = 14 = 3\times4 + 2 \Rightarrow u_0 \equiv 2$ (mod.4).

b) *Hérédité* : Soit P_k vraie « $u_{2k} \equiv 2$ (mod.4) ». Peut-on déduire P_{k+1} vraie « $u_{2(k+1)} \equiv 2$ (mod.4) » ?

$u_{2(k+1)} = u_{2k+2}$, d'où $u_{2k+2} \equiv u_{2k}$ (mod. 4) , d'après 2-a) implique $u_{2(k+1)} \equiv 2$ (mod.4).

c) *Conclusion* : P_k est vraie pour tout k entier naturel.

Si n est impair, on pose $n = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$:

$u_{n+2} \equiv u_n$ (mod. 4) $\Rightarrow$ $u_{2k+1} \equiv u_{2k-1}$ (mod.4) $\equiv u_{2k-3}$ (mod.4) …. $\equiv u_1$ (mod.4) $\equiv 0$ (mod.4) , puisque $u_1 = 64$.

3/ Démontrer que, pour tout entier naturel n , $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

Soit la proposition de récurrence P_n : « $2u_n = 5^{n+2} + 3$ ».

a) *Initialisation* : P_0 est vraie, puisque $u_0 = 14 \Rightarrow 2u_0 = 28 = 25 + 3 = 5^2 + 3 = 5^{0+2} + 3$.

b) *Hérédité* : Soit P_n vraie « $2u_n = 5^{n+2} + 3$ » . Peut-on déduire P_{n+1} vraie « $2u_{n+1} = 5^{(n+1)+2} + 3$ » ?

$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5(2u_n) - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+3} + 3 = 5^{(n+1)+2} + 3$.

c) *Conclusion* : P_n est vraie pour tout n entier naturel.

4/ En déduire que, pour tout entier naturel n , $2u_n \equiv 28$ (mod. 100).

On sait que $100 = 4\times25$, donc :

$n \geq 0 \Rightarrow n + 2 \geq 2$, et $5^{n+2} = 5^2\times5^n = 25\times5^n$, d'où : $2u_n = 5^{n+2} + 3 \equiv 3$ (mod. 25).

On conclue : $2u_n = 25K + 3$, avec K entier naturel non nul.

On voit également que $u_n \equiv 0$ (mod. 4) ou $u_n \equiv 2$ (mod. 4) $\Rightarrow$ $2u_n \equiv 0$ (mod.4).

Autre démonstration : $5 \equiv 1$ (mod. 4) $\Rightarrow$ $5^{n+2} \equiv 1$ (mod. 4) $\Rightarrow$ $2u_n = 5^{n+2} + 3 \equiv 0$ (mod.4) .

Donc $2u_n$ est un multiple de 4 .

$2u_n = 25K + 3 \equiv 0$ (mod. 4) $\Rightarrow$ $K + 3 \equiv 0$ (mod. 4) , soit $K + 3 = 4k$ $\Rightarrow$ $K = 4k - 3$, avec k entier naturel non nul.

D'où : $2u_n = 25(4k - 3) + 3 = 100k - 72 = 100(k - 1) + 28 = 100k' + 28$, avec k' entier naturel, qui peut être nul.

On obtient bien : $2u_n \equiv 28$ (mod. 100).

5/ Déterminer, suivant les valeurs de n , les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n .

Pour tout nombre entier, les deux derniers chiffres de son écriture décimale sont son reste dans sa division par 100.

On déduit que les deux derniers chiffres de $2u_n$ sont 28 .

Seuls 14 et 64 sont des nombres inférieurs à 100 dont le double admette 28 pour deux derniers chiffres.

Ce résultat confirme la conjecture selon laquelle u_n admet 14 ou 64 pour deux derniers chiffres.