1/ g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme toute fonction polynôme.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, comme son terme de plus haut degré x^3 .

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$.

Les extrema de g sont $(-1 ; g(-1))$ et $(+1 ; g(+1))$, soit $(-1 ; -1)$ et $(1 ; -5)$.

Le signe de $g'(x)$ est celui de $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

La <u>continuité</u> de g sur $]-\infty ; 1]$ prouve que $g(x) \le -1$, donc $g(x) < 0$ sur cet intervalle.

Sur $[1 ; +\infty[$, $g(1) = -5 < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors que g est strictement croissante sur cette intervalle, prouve,

selon le <u>théorème de la valeur intermédiaire</u>, qu'il existe $\alpha > 1$ unique, tel que $g(\alpha) = 0$.

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

La calculatrice donne : $g(2{,}1) = -0{,}039$ et $g(2{,}2) = +1{,}048$.

On déduit $2{,}1 < \alpha < 2{,}2$. On peut donc poser $\alpha = 2{,}15$ à 10^{-1} près, soit $2{,}05 < \alpha < 2{,}25$.

Si l'énoncé avait demandé de donner un intervalle d'amplitude 10^{-1} contenant α , on dirait : $\alpha \in]2{,}1 ; 2{,}2[$.

c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$: Au vu des variations de g : $\begin{cases} x < \alpha \Leftrightarrow g(x) < 0 \\ x = \alpha \Leftrightarrow g(x) = 0 \\ x > \alpha \Leftrightarrow g(x) > 0 \end{cases}$.

2/ f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1 ; +1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.

a) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1 ; +1\}$, $f'(x) = \dfrac{2x.g(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1 ; +1\}$, comme rapport de polynômes définis, continus et dérivables sur cet intervalle.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{6x^2(x^2 - 1) - 2x(2x^3 + 3)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2x(x^3 - 3x - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2x.g(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f : $f'(x)$ est du signe de $x.g(x)$. Par ailleurs $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^3 + 3}{\alpha^2 - 1} \approx 6{,}3$.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x.g(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	||	$\nearrow$	-3	$\searrow$	||	$\searrow$	$6{,}3$	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative de f :