Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Soit la fonction f définie sur $[-1\ ;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1/ Montrer que f est strictement croissante.

f est définie, continue sur $[-1\ ;+\infty[$, mais dérivable uniquement sur $]-1\ ;+\infty[$ (tangente verticale en -1).

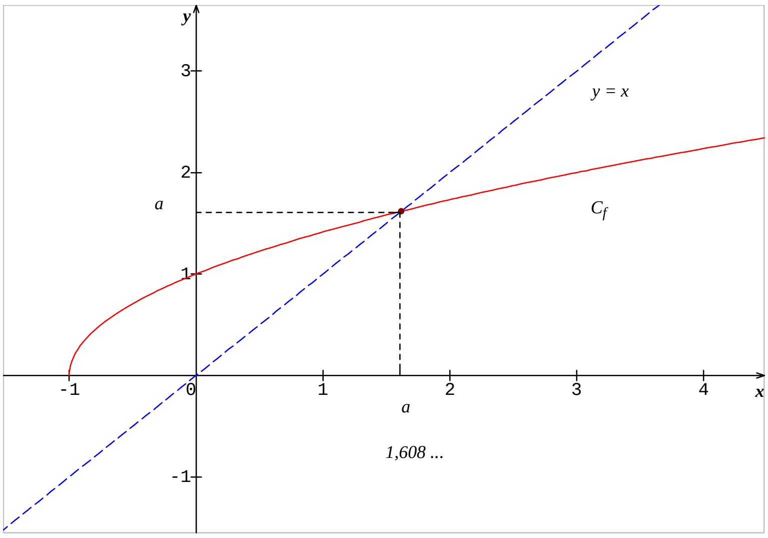
$f = \sqrt{u} \Rightarrow f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, soit $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$ sur $]-1\ ;+\infty[$, ce qui prouve que f est strictement croissante.

2/ Soit a la solution de l'équation $f(x) = x$.

On cherche l'abscisse de l'intersection de C_f avec $y = x$, 1ère bissectrice des axes.

$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x$ (ce qui impose $x \geq 0$) $\Leftrightarrow 1 + x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$, soit $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Donc $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803$ (il s'agit du *nombre d'or* , rapport idéal de deux longueurs a et b : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+b}{a}$).



Montrer que, pour tout réel $x \in [1\ ;a]$, alors $f(x) \in [1\ ;a]$.

f étant *continue* et *strictement croissante*, ses images conservent l'ordre des antécédents :

$1 \leq x \leq a \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(a)$, avec $f(1) = \sqrt{2} \approx 1{,}414$ .. et $f(a) = a$.

Donc : $1 \leq x \leq a \Rightarrow \sqrt{2} \leq f(x) \leq a \Rightarrow 1 \leq \sqrt{2} \leq f(x) \leq a$, soit $1 \leq f(x) \leq a$.

Si les antécédents x appartiennent à l'intervalle $[1\ ;a]$, leurs images $f(x)$ restent dans l'intervalle $[1\ ;a]$.

3/ En déduire, en raisonnant par récurrence, que pour tout entier n : $1 \leq u_n \leq a$ et $u_n \leq u_{n+1}$.

Soit P_n : « $1 \leq u_n \leq a$ » .

a) *Initialisation* : P_0 est vraie, car $1 \leq u_0 \leq a$, puisque $u_0 = 1$.

b) *Hérédité* : Supposons P_n vraie $(1 \leq u_n \leq a)$. Peut-on en déduire P_{n+1} vraie $(1 \leq u_{n+1} \leq a)$?

D'après 2/ : $1 \leq u_n \leq a \Rightarrow 1 \leq f(u_n) \leq a$, soit $1 \leq u_{n+1} \leq a$.

P_{n+1} est donc vraie, si l'on sait P_n vraie (droit de passage).

c) *Conclusion* : P_n est vraie pour tout n entier naturel.

Soit Q_n : « $u_n \leq u_{n+1}$ » .

a) *Initialisation* : Q_0 est vraie, car $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414..$ font que $u_0 \leq u_1$.

b) *Hérédité* : Supposons Q_n vraie ($u_n \leq u_{n+1}$). Peut-on en déduire Q_{n+1} vraie ($u_{n+1} \leq u_{n+2}$) ?

Sachant f croissante : $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Q_{n+1} est donc vraie, si l'on sait Q_n vraie (droit de passage).

c) *Conclusion* : Q_n est vraie pour tout n entier naturel.

4/ En déduire que la suite u est convergente, et déterminer sa limite L .

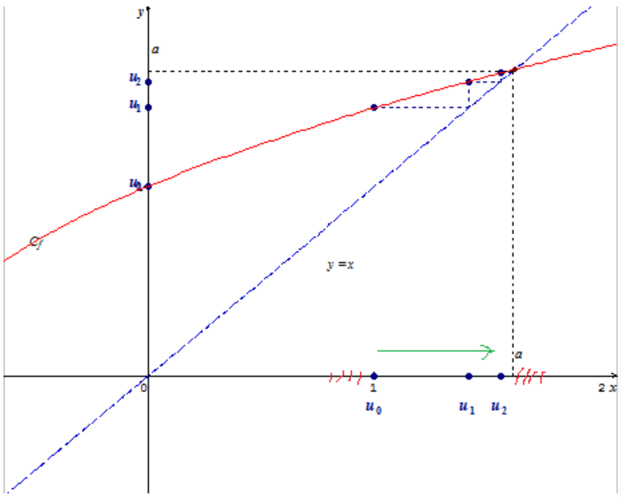
Les propriétés P_n et Q_n signifient que la suite u est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$) et bornée, donc majorée ($1 \leq u_n \leq a$).

On déduit que u est convergente vers L , telle que $1 \leq L \leq a$.

Passons la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ à sa limite, pour n tendant vers $+\infty$.

$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ devient $L = \sqrt{1 + L}$, les termes de la suite u s'accumulant sur L , jusqu'à s'y confondre.

On retrouve $L = a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, nombre d'or.



n	u
0	1
1	1,41421
2	1,55377
3	1,59805
4	1,61185
5	1,61612
6	1,61744
7	1,61785
8	1,61798
9	1,61802
10	1,61803
11	1,61803
12	1,61803
13	1,61803
14	1,61803
15	1,61803
16	1,61803
17	1,61803
18	1,61803