On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$.

1/ Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 4}) - \lim_{x \to -\infty} x = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty \ .$$

2-a) Démontrer que, pour tout x réel : $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x}$.

On va utiliser la technique de la quantité conjuguée, $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a + b}$ *, d'où :* $\sqrt{a} - b = \dfrac{a - b^2}{\sqrt{a} + b}$.

L'intérêt est de remplacer une différence $\infty - \infty$ en une somme $\infty + \infty$ au dénominateur.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x = \frac{(x^2 + 4) - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x} \ .$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \infty - \infty \text{ indéterminé.}$$

En utilisant la forme démontrée au a) : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = \frac{4}{\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} + x)}$,

Comme $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} + x) = \infty + \infty = +\infty$, on déduit : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{4}{\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 4} + x)} = \frac{4}{\infty} = 0$.