Dans chacun des cas suivants, la fonction f est dérivable sur l'intervalle I. Calculer $f'(x)$.

1/ $I =]0\,;+\infty[$ et $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4$.

On sait $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ et $(u^n)' = n.u^{n-1}.\boldsymbol{u'}$, d'où : $f'(x) = 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^3\left(\mathbf{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = 4\,\frac{(x+1)^3}{x^3}\times\frac{x^2-1}{x^2} = \frac{4(x+1)^4(x-1)}{x^5}$.

On remarquera :

$f'(x)$ *s'annule en* $x = -1$ (sans changer de signe – Point d'inflexion), *et en* $x = +1$ (en changeant de signe – Extremum).

Par ailleurs, $f'(x)$ *change également de signe en* $x = 0$.

2/ $I = \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin x + \cos x)^3$.

On sait que $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, et $(u^n)' = n.u^{n-1}.\boldsymbol{u'}$, d'où : $f'(x) = 3(\sin x + \cos x)^2\boldsymbol{(\cos x - \sin x)}$.

3/ $I =]0\,;+\infty[$ et $f(x) = (\sqrt{x} + x)^4$.

On sait $\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $(u^n)' = n.u^{n-1}.\boldsymbol{u'}$, d'où : $f'(x) = 4(\sqrt{x} + x)^3\left(\mathbf{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1}\right) = \frac{2(\sqrt{x} + x)^3(1 + 2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$,

$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^3(1 + 2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 2x(1 + \sqrt{x})^3(1 + 2\sqrt{x})$.