Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition de la fonction f , ses limites aux bornes de ce domaine, et sa dérivée.

a) $f(x) = \ln(2x - 1)$,

Domaine :

$\ln A$ est défini si et seulement si $A > 0$.

$\ln(2x-1)$ impose $2x - 1 > 0$, soit $x > +\frac{1}{2}$. On conclue $D_f =]+\frac{1}{2} ; +\infty[$.

Limites aux bornes :

- Si $x \to +\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures, alors $2x - 1 \to 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 1/2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1/2^+} \ln(2x-1) = -\infty$.
- Si $x \to +\infty$, alors $2x - 1 \to +\infty$, soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x-1) = +\infty$.

Dérivée :

$f = \ln u \Rightarrow f' = \frac{u'}{u}$, d'où : $f(x) = \ln(2x-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x-1} > 0$ sur $]+\frac{1}{2} ; +\infty[$.

b) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$,

Domaine :

$\ln A$ est défini si et seulement si $A > 0$.

$\ln(x^2 + x + 1)$ impose $x^2 + x + 1 > 0$, or $\Delta = -3 < 0$, donc $x^2 + x + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$. On conclue $D_f = \mathbb{R}$.

Limites aux bornes :

- Si $x \to \pm\infty$: alors $x^2 + x + 1 \to +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln(x^2 + x + 1) = +\infty$ (des deux côtés) .

Dérivée :

$f = \ln u \Rightarrow f' = \frac{u'}{u}$, d'où : $f(x) = \ln(x^2 + x + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$, du signe de $2x + 1$.

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$,

Domaine : $\ln A$ est défini si et seulement si $A > 0$.

$\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ impose $\frac{x}{x^2+1} > 0$, soit $x > 0$. On conclue $D_f =]0 ; +\infty[$.

Limites aux bornes :

- Si $x \to 0^+$, alors $\frac{x}{x^2+1} \to 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = -\infty$.
- Si $x \to +\infty$, alors $\frac{x}{x^2+1} \to 0$, soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = -\infty$.

Dérivée :

$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$, soit $f(x) = \ln(x) - \ln(x^2 + 1)$.

$f = \ln u \Rightarrow f' = \frac{u'}{u}$, d'où : $f(x) = \ln(x) - \ln(x^2+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) - 2x^2}{x(x^2+1)} = \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$.

$f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{x(x^2+1)}$, qui est du signe de $1-x$ sur $]0\,;+\infty[$.

d) $f(x) = (x+1).\ln(2-x)$.

Domaine :

$\ln A$ est défini si et seulement si $A > 0$.

$\ln(2-x)$ impose $2-x>0$, soit $x<2$. On conclue $D_f =]-\infty\,;2[$.

Limites aux bornes :

- Si $x \to -\infty$, alors $\begin{cases} x+1 \to -\infty \\ 2-x \to +\infty \text{ et } \ln(2-x) \to +\infty \end{cases}$, soit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1).\ln(2-x) = -\infty$.
- Si $x \to 2$ par valeurs inférieures, alors $\begin{cases} x+1 \to 3 \\ 2-x \to 0^+ \text{ et } \ln(2-x) \to -\infty \end{cases}$, d'où $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.

Dérivée :

$f = u\times v \Rightarrow f' = u'v + u.v'$ et $v = \ln w \Rightarrow v' = \dfrac{w'}{w}$,

d'où : $f(x) = (x+1).\ln(2-x) \Rightarrow f'(x) = 1\times\ln(2-x) + (x+1)\times\dfrac{-1}{2-x} = \ln(2-x) - \dfrac{x+1}{2-x}$.