<u>Partie A : Etude de la convergence d'une suite :</u>

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{-4}{4 + u_n} \end{cases}$, pour tout n entier naturel.

1/ Démontrer par récurrence que $-2 \leq u_n \leq 0$, pour tout n entier naturel.

Il est généralement plus simple de comparer la différence de deux nombres à 0, plutôt que ces deux nombres entre eux.

- Soit la proposition de récurrence P_n : « $-2 \leq u_n$ », ou encore « $u_n + 2 \geq 0$ », pour tout n entier naturel.

a) *Initialisation*

P_0 est vraie, car $u_0 = 0$, soit $-2 \leq u_0$.

b) *Hérédité*

Supposons P_k vraie, soit $u_k + 2 \geq 0$. Peut-on en déduire P_{k+1} vraie, soit $u_{k+1} + 2 \geq 0$?

$u_{k+1} + 2 = \dfrac{-4}{4 + u_k} + 2 = \dfrac{-4 + 2(4 + u_k)}{4 + u_k} = \dfrac{4 + 2u_k}{4 + u_k} = \dfrac{2(2 + u_k)}{2 + (2 + u_k)} \geq 0$, sachant $2 + u_k \geq 0$, puisque P_k a été <u>supposée</u> vraie.

On a bien montré que <u>si</u> P_k est vraie, <u>alors</u> P_{k+1} est également vraie.

c) *Conclusion* : P_n est vraie pour tout n entier naturel, soit $-2 \leq u_n$.

- Soit la proposition de récurrence Q_n : « $u_n \leq 0$ », pour tout n entier naturel.

a) *Initialisation*

Q_0 est vraie, car $u_0 = 0$, soit $u_0 \leq 0$ (inférieur <u>ou</u> égal).

b) *Hérédité*

Supposons Q_k vraie ($u_k \leq 0$). Peut-on en déduire Q_{k+1} vraie ($u_{k+1} \leq 0$) ?

On sait que $-2 \leq u_k$, soit $u_k + 2 \geq 0$, et a fortiori $4 + u_k > 0$.

En conséquence, on déduit $\dfrac{-4}{4 + u_k} \leq 0$, soit $u_{k+1} \leq 0$.

c) *Conclusion* : Q_n est vraie pour tout n entier naturel, soit $u_n \leq 0$.

2/ Etudier le sens de variation de la suite u.

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-4}{4 + u_n} - u_n = \dfrac{-4 - u_n(4 + u_n)}{4 + u_n} = -\dfrac{u_n^2 + 4u_n + 4}{4 + u_n} = -\dfrac{(u_n + 2)^2}{4 + u_n} \leq 0$, sachant $4 + u_n > 0$.

On conclue : $u_{n+1} - u_n \leq 0$, soit $u_{n+1} \leq u_n$, pour tout n entier naturel. La suite u est décroissante.

Autre méthode :

Dans la méthode précédente, nous avons été chanceux en faisant apparaître le terme $(u_n + 2)^2$.

Une autre méthode, plus générale, consiste à comparer le signe de deux différences consécutives, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-4}{4 + u_n} - \dfrac{-4}{4 + u_{n-1}} = \dfrac{-4(4 + u_{n-1}) + 4(4 + u_n)}{(4 + u_n)(4 + u_{n-1})} = \dfrac{4(u_n - u_{n-1})}{(4 + u_n)(4 + u_{n-1})}$.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{4(u_n - u_{n-1})}{(4 + u_n)(4 + u_{n-1})}$. Sachant que le dénominateur est positif, on déduit que $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$, sont de même signe, donc que le signe se conserve en descendant l'expression d'un rang, ce signe commun étant celui de $u_1 - u_0$.

$u_1 - u_0 = \dfrac{-4}{4 + u_0} - u_0 = -1 < 0$. Donc, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite u est décroissante.

3/ Etudier la convergence de la suite u .

On sait que la suite u est bornée ($-2 \le u_n \le 0$).

Etant <u>*décroissante et minorée*</u> par -2 , la suite u converge vers une limite $L \ge -2$.

Pour déterminer cette limite on peut <u>*passer la relation de récurrence à sa limite*</u>, lors que n devient infini :

$$u_{n+1} = \frac{-4}{4+u_n} \text{ devient } L = \frac{-4}{4+L}$$, puisque tous les termes viennent converger, donc buter sur L .

$$L(4+L) = -4 \Leftrightarrow L^2 + 4L + 4 = 0 \Leftrightarrow (L+2)^2 = 0 \Leftrightarrow L = \lim_{n \to +\infty} u_n = -2 .$$

<u>Remarque</u> : L est confondue avec une des bornes de u , ce qui est souvent le cas, mais pas obligatoirement.

Il suffit que L respecte $-2 \le L \le 0$.

<u>Partie B : Utilisation d'une suite arithmétique</u> : (l'objectif est de trouver la limite L par une méthode plus rigoureuse)

On définit la suite v par $v_n = \dfrac{1}{2+u_n}$, pour tout n entier naturel.

1/ Démontrer que la suite v est arithmétique, de raison $r = \dfrac{1}{2}$.

Etudions la valeur de $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2+u_{n+1}} - \frac{1}{2+u_n} = \frac{1}{2+\dfrac{-4}{4+u_n}} - \frac{1}{2+u_n} = \frac{4+u_n}{2(4+u_n)-4} - \frac{1}{2+u_n} = \frac{4+u_n}{2(2+u_n)} - \frac{1}{2+u_n} ,$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(4+u_n)-2}{2(2+u_n)} = \frac{2+u_n}{2(2+u_n)} = \frac{1}{2} .$$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}$, la suite v est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{2+u_0} = \dfrac{1}{2}$.

2/ Exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire que $u_n = \dfrac{2}{n+1} - 2$, pour tout n entier naturel.

v arithmétique implique $v_n = v_0 + n.r = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.n$, soit $v_n = \dfrac{n+1}{2}$.

Sachant $v_n = \dfrac{1}{2+u_n}$, on déduit $\dfrac{1}{2+u_n} = \dfrac{n+1}{2} \Leftrightarrow 2 + u_n = \dfrac{2}{n+1} \Leftrightarrow u_n = \dfrac{2}{n+1} - 2$.

3/ Calculer la limite de la suite u , et celle de la suite v .

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{n+1} - 2\right) = -2$, résultat précédemment trouvé.

La limite de v peut se trouver de deux façons différentes :

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{2} = +\infty$. On peut aussi faire valoir que toute suite arithmétique de raison r non nulle diverge,

vers $+\infty$ si $r > 0$, ce qui est le cas, ou $-\infty$ si $r < 0$.

<u>2ème méthode</u> :

$v_n = \dfrac{1}{2+u_n}$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2$, par valeurs supérieures, puisque $-2 \le u_n$.

En conséquence, $2 + u_n$ tend vers 0 par valeurs positives, donc $\dfrac{1}{2+u_n}$ tend vers $+\infty$.

On retrouve $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.