Déterminer les limites éventuelles des suites u et v suivantes :

<u>Rappel</u> :

Soit une suite géométrique u , de raison q non nulle.

Si $|q| < 1$, la suite est convergente vers 0 , $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exemples : $u_n = 5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$, soit $q = +\frac{3}{4} = +0,75$. La multiplication d'un terme par q pour obtenir le suivant, n'est pas vraiment une multiplication, mais une division, ici on prend les 3 quarts du terme précédent, donc la limite est 0 .

$v_n = 3\times(-0,2)^n$, soit $q = -0,2 = -\frac{1}{5}$. On divise chaque terme par 5 pour obtenir le suivant, avec changement de signe selon la parité de n , la suite est alternée (positif, négatif), mais la limite reste 0 .

Si $|q| = 1$, soit $q = +1$ ou $q = -1$, la suite est constante ou stationnaire.

Si $|q| > 1$, la suite est divergente, éventuellement alternée, de limite $\pm\infty$.

Exemples : $u_n = -(5^n)$, soit $q = 5$, les termes sont tous négatifs, mais de plus en plus grands. La limite est $-\infty$.

$v_n = 2(-3)^n$, soit $q = -3$. Les termes changent de signe selon la parité de n . La limite est double $\pm\infty$.

a) $\boldsymbol{u_n = 1 - \dfrac{2}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}}$

La suite géométrique $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, est de raison $q = \frac{2}{3}$, soit $|q| < 1$. On déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

En conséquence : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 - \dfrac{2}{1 - 0} = -1$.

b) $\boldsymbol{v_n = 6^n - 7^n}$

On est confronté à un cas d'indétermination $\infty - \infty$, même si on peut conjecturer que la croissance de 7^n est supérieure à celle de 6^n , donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

$v_n = 7^n \left[\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right]$. *On a choisi de factoriser* 7^n *pour faire apparaître* $\left(\frac{6}{7}\right)^n$, avec $q = \frac{6}{7}$, $|q| < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$.

On déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = (\lim\limits_{n \to +\infty} 7^n)[\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n - 1] = +\infty \times(-1) = -\infty$.

c) $\boldsymbol{u_n = \dfrac{5^{n+3}}{8^n}}$

$u_n = \dfrac{5^3 \times 5^n}{8^n} = 125\times\left(\frac{5}{8}\right)^n$, suite géométrique, $q = \frac{5}{8}$, $|q| < 1$, soit $-1 < q < +1$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

d) $\boldsymbol{v_n = \dfrac{3^n - 4^n}{3^n + 2^n}}$

$v_n = \dfrac{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1\right]}{3^n\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]} = \left(\frac{4}{3}\right)^n . \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = -1$.

Par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$, d'où on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

e) $\boldsymbol{u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

f) $\boldsymbol{v_n = \frac{3^n}{2^{2n}}}$.

$v_n = \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{(2^2)^n} = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.