Soit la fonction f telle que $f(x) = e^{1/x}$.

On veut faire l'étude de la fonction f , et tracer sa courbe représentative C_f .

a) Déterminer son domaine de définition et ses limites aux bornes du domaine (Bien distinguer les deux côtés de $x = 0$).

e^A est partout défini, sous réserves que A le soit, or $A = \frac{1}{x}$ n'est défini que si $x \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

Limites aux bornes du domaine

Si $x \to -\infty$, alors $\frac{1}{x} \to 0^-$, d'où $e^{1/x} \to 1^-$. On déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1^-$ (asymptote horizontale $y = 1$).

Si $x \to +\infty$, alors $\frac{1}{x} \to 0^+$, d'où $e^{1/x} \to 1^+$. On déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1^+$ (asymptote horizontale $y = 1$).

Si $x \to 0^-$, alors $\frac{1}{x} \to -\infty$, d'où $e^{1/x} \to 0^+$. On déduit $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ (un prolongement par continuité est possible).

On peut poser $f(0) = 0$, ce qui assure d'une continuité de f à gauche en 0 .

Si $x \to 0^+$, alors $\frac{1}{x} \to +\infty$, d'où $e^{1/x} \to +\infty$. On déduit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ (asymptote verticale $x = 0$, seulement du côté positif de 0).

b) Expliquer pourquoi un *prolongement par continuité* est possible en $x = 0$.

Voir les remarques précédentes. Le nouveau domaine est $D = \mathbb{R}$, avec une discontinuité à droite en $x = 0$.

c) Etudier les variations de la fonction f .

$f = e^u \Rightarrow f' = u'.e^u$, avec $u = \frac{1}{x} \Rightarrow u' = -\frac{1}{x^2}$. On déduit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}.e^{1/x}$.

La dérivée $f'(x)$ est partout négative, donc f partout décroissante, avec une « cassure » en $x = 0$, du côté droit.

d) Etudier avec précision la pente de la tangente à C_f en $x = 0$.

Du côté droit de 0 , l'asymptote verticale fait que la tangente à C_f devient verticale en se rapprochant de 0^+ .

Du côté gauche de 0 , f est décroissante, jusqu'à rejoindre l'origine des axes, puisqu'on a posé $f(0) = 0$.

Il faut préciser avec quelle pente se fait la jonction avec l'origine.

<u>1ère méthode</u> : *Glissement de tangente* : Soit $x < 0$, proche de 0 .

La tangente à C_f en x a pour coefficient directeur (pente) $f'(x)$.

Plus x se rapproche de 0^- , plus la pente de cette tangente, que l'on glisse le long de la courbe, se rapproche de la valeur $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}.e^{1/x}$ indéterminé de forme $\infty \times 0$ ($\frac{1}{x^2} \to +\infty$ et $\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{1/x} \to 0$).

Posons $X = \frac{1}{x}$, qui tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0^- .

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}.e^{1/x} = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{e^X}{X^2} = 0$ (on sait qu'aux infinis, la croissance de e^x est infiniment plus rapide que celle de toute puissance <u>positive</u> de X). Ainsi $\lim\limits_{X \to -\infty} \frac{e^X}{X^2} = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{e^X}{X} = \lim\limits_{X \to -\infty} \frac{e^X}{\sqrt{X}} = 0$ ($\sqrt{X} = X^{1/2}$).

On déduit $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 0$, la courbe admet une tangente horizontale en $x = 0^-$.

$2^{\text{ème}}$ méthode : *Limite de sécante passant par l'origine O* : Soit M point de C_f, d'abscisse $x<0$, proche de 0 .

La pente de la sécante (OM) est $p=\dfrac{y_M-y_O}{x_M-x_O}=\dfrac{e^{1/x}-0}{x-0}=\dfrac{1}{x}.e^{1/x}$.

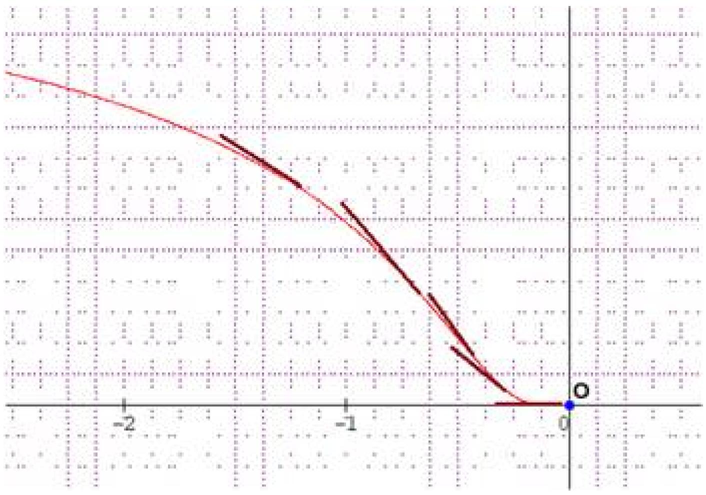
$\lim\limits_{x\to 0^-} p=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}.e^{1/x}$, indéterminé de forme $\infty\times 0$.

Posons $X=\dfrac{1}{x}$, qui tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0^-. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}.e^{1/x}=\lim\limits_{X\to -\infty}\dfrac{e^X}{X}=0$.

On obtient même résultat. La pente de la tangente en $x=0$ est nulle, du côté négatif de 0 .

Les deux méthodes donnent le même résultat dans la quasi-totalité des cas, sauf si f' (dérivée) n'est pas continue en 0 .

Méthode par les tangentes



Méthode par les sécantes

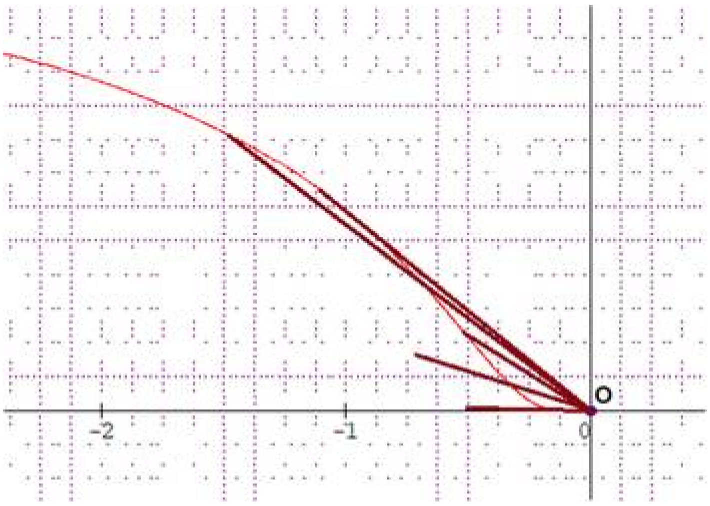


Tableau de variations

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	||		$-$	
$f(x)$	1	↘	0	||	$+\infty$	↘	1

e) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe.

Les points d'inflexion (changement de courbure, passage de concave à convexe, croisement de la tangente) , sont les points où la dérivée seconde f'' s'annule.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.e^{1/x} = -x^{-2}.e^{1/x} \Rightarrow f''(x) = -[(-2x^{-3}).e^{1/x} + x^{-2}.(-\frac{1}{x^2}.e^{1/x})] = \frac{2}{x^3}.e^{1/x} + \frac{1}{x^4}.e^{1/x} = \frac{2x+1}{x^4}.e^{1/x}$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$, soit $x = -\frac{1}{2}$, avec $y = f(-\frac{1}{2}) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$. Le point d'inflexion est $B(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{e^2})$.

$x < -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 1 < 0$, soit $f''(x) < 0$. La courbe est *concave* (courbure vers le bas).

$x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 1 > 0$, soit $f''(x) > 0$. La courbe est *convexe* (courbure vers le bas).

f) Tracer la courbe C_f .