On considère la suite u définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}$.

1/ Démontrer que la suite v définie par $v_n = u_n - u_{n-1}$ est géométrique. Déterminer sa raison q et son premier terme v_1 .

$u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 3u_n - 3u_{n-1} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 3(u_n - u_{n-1})$.

Soit la suite v telle que $v_n = u_n - u_{n-1}$.

$u_{n+1} - u_n = 3(u_n - u_{n-1}) \Leftrightarrow v_{n+1} = 3v_n$.

La suite v est géométrique, de raison $q = 3$ et de premier terme $v_1 = u_1 - u_0 = 1$.

2/ En déduire l'écriture de v_n en fonction de n .

On déduit : $v_n = v_1.q^{n-1}$, soit $v_n = 3^{n-1}$.

3/ Déterminer la valeur de $S = v_1 + v_2 + ... + v_n$ en fonction de n .

On sait que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique v , de raison $q \neq 0$, de 1er terme v_1 est :

$$S = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \sum_{p=1}^{n} v_p = v_1 \frac{1-q^n}{1-q} .$$

On déduit $S = \dfrac{1-3^n}{1-3} = \dfrac{3^n-1}{2}$.

4/ En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

Par ailleurs : $S = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1})$,

Après simplification des additions, on obtient : $S = u_n - u_0 = u_n$.

On obtient bien $u_n = \dfrac{3^n-1}{2}$.