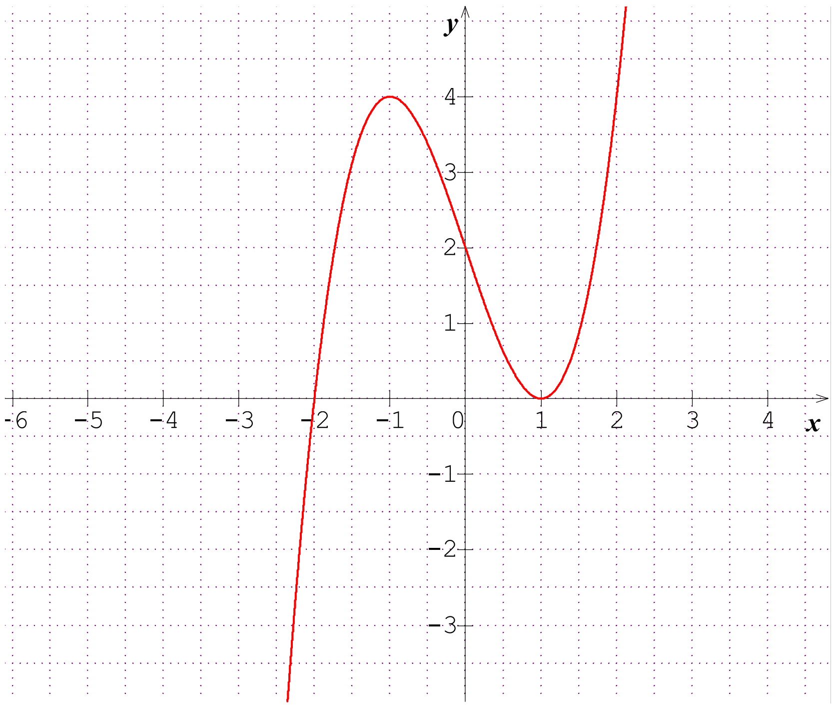
L'objectif est de résoudre l'inéquation $x^3 - 3x + 2 \leq 0$.

1/ Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \rightarrow f(x) = x^3 - 3x + 2$.



Conjecturer la solution de l'inéquation proposée.

$x^3 - 3x + 2 \leq 0 \iff f(x) \leq 0$.

Les solutions cherchées sont les intervalles de l'axe horizontal $x'x$ où la courbe C_f passe à une ordonnée $f(x) \leq 0$, c'est-à-dire, là où elle est sous l'axe $x'x$ ou le touche.

Attention : $x = +1$ est aussi solution, car $f(1) = 0$.

On conjecture que l'ensemble des x solutions de $f(x) \leq 0$ est $S =]-\infty ; -2] \cup \{+1\}$.

2/ Vérifier que $x = 1$ est racine de l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$.

On constate que $1^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, donc $x = +1$ est racine de $x^3 - 3x + 2 = 0$.

3/ Justifier la factorisation $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + ax + b)$, ou on déterminera les valeurs de a et b .

Lorsqu'un polynôme $P(x)$ s'annule en $x = a$, le binôme $x - a$, à l'origine de cette nullité, se factorise.

Donc $P(a) = 0 \iff P(x) = (x - a).Q(x)$ avec (degré de Q) = (deg P) – 1 .

On peut donc affirmer que $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(Ax^2 + Bx + C)$.

A l'évidence, en développant le terme de plus haut degré est Ax^3 , ce qui justifie $A = 1$.

Développons $(x - 1)(x^2 + ax + b)$, puis regroupons les termes de même degré, afin d'identifier à $x^3 - 3x + 2$.

$(x - 1)(x^2 + ax + b) = x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b = x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b$.

Identification de $x^3 + (a - 1)x^2 + (b - a)x - b$ avec $x^3 + \mathbf{0}x^2 - 3x + 2$.

Le coefficient de chaque degré doit être le même $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - a = -3 \\ -b = +2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = +1 \\ \mathbf{b - a = -3} \\ b = -2 \end{cases}$.

On obtient $a = +1$, $b = -2$, tout en vérifiant la *compatibilité* $b - a = -3$.

On déduit : $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$.

4/ Vérifier que $x = 1$ est à nouveau solution de l'équation $x^2 + ax + b = 0$ obtenue.

On constate que $1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$, donc $x = +1$ est racine de $x^2 + x - 2 = 0$.

5/ Justifier la factorisation $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(cx + d)$, ou on déterminera les valeurs de c et d .

Soit $Q(x) = x^2 + x - 2$.

$Q(1) = 0 \Rightarrow Q(x) = (x - 1).R(x)$, où $R(x) = cx + d$, binôme du 1er degré.

On conclue : $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)\mathbf{(x - 1)(cx + d)} = (x - 1)^2(cx + d)$.

Développons $(x - 1)(cx + d)$, puis identifions au trinôme $x^2 + x - 2$.

$(x - 1)(cx + d) = cx^2 + dx - cx - d = cx^2 + (d - c)x - c$, que l'on identifie à $x^2 + x - 2$.

Le coefficient de chaque degré doit être le même $\begin{cases} c = +1 \\ d - c = +1 \\ -c = -2 \end{cases}$, soit $c = +1$ et $d = c + 1 = +2$.

On déduit $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$.

6/ Terminer la résolution de l'inéquation $x^3 - 3x + 2 \leq 0$.

On déduit $x^3 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) \leq 0$.

On remarquera que $(x - 1)^2$ *est partout positif, sauf en* $x = +1$ *, où il est nul.*

De même : $x + 2$ est nul en $x = -2$, *négatif avant* -2 , *positif après* -2 (signe de $a = 1$).

x	$-\infty$		-2		$+1$		$+\infty$
$x + 2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x - 1)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	
$x^3 - 3x + 2$		**-**	**0**	**+**	**0**	**+**	

On conclue : $S =]-\infty\ ; -2] \cup \{+1\}$.