

L'objectif de l'exercice est de comparer deux suites basées sur une même fonction, l'une étant fonctionnelle, et l'autre récurrente.
Chaque partie de l'exercice est indépendante des autres.

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Faire une étude rapide de f . Tracer sa courbe représentative C_f .

f est définie, continue et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

$$f(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1.$$

La courbe C_f admet $y = 1$ pour asymptote horizontale.

On remarquera qu'une quantité sortant ou entrant dans une racine doit toujours être positive, d'où la valeur absolue.

$$\text{Dérivée : } f = \frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \text{ et } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$\text{D'où : } f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1) + x^2}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, \text{ soit } f'(x) = \frac{2x^2 + 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

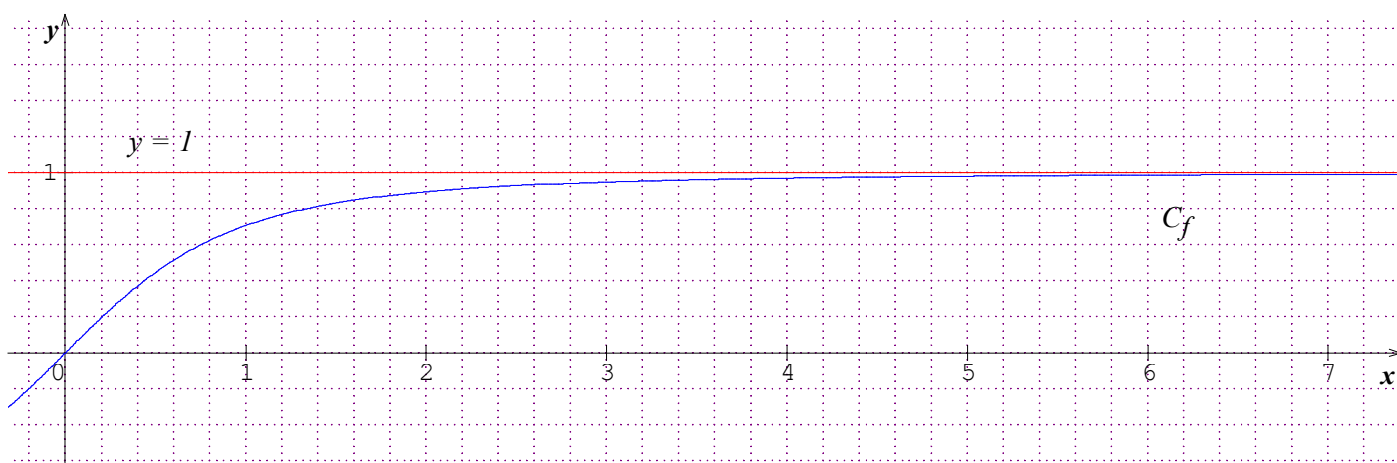
On constate que $f'(x) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$, donc que f est strictement croissante sur cet intervalle.

Par ailleurs, $f'(0) = 1$, donc la tangente en $(0 ; 0)$ est $y = x$, première bissectrice des axes.

Tableau de Variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow$ +1

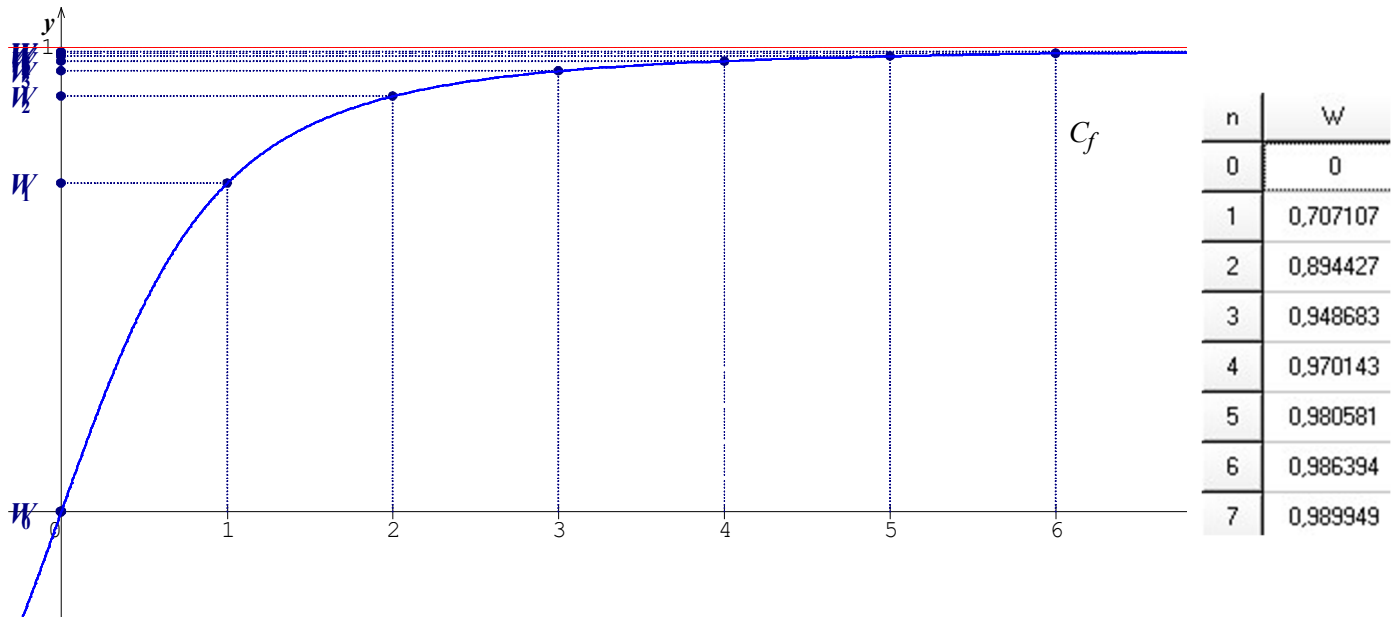
Courbe Représentative :



Partie B : Etude d'une suite (W_n) définie de façon fonctionnelle par une fonction f .

Soit la suite (W_n) telle que $W_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$, pour tout n entier naturel, soit $W_n = f(n)$.

1/ Placer $W_0, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5$ sur l'axe des ordonnées $y'y$, et les points correspondants de la courbe C_f .



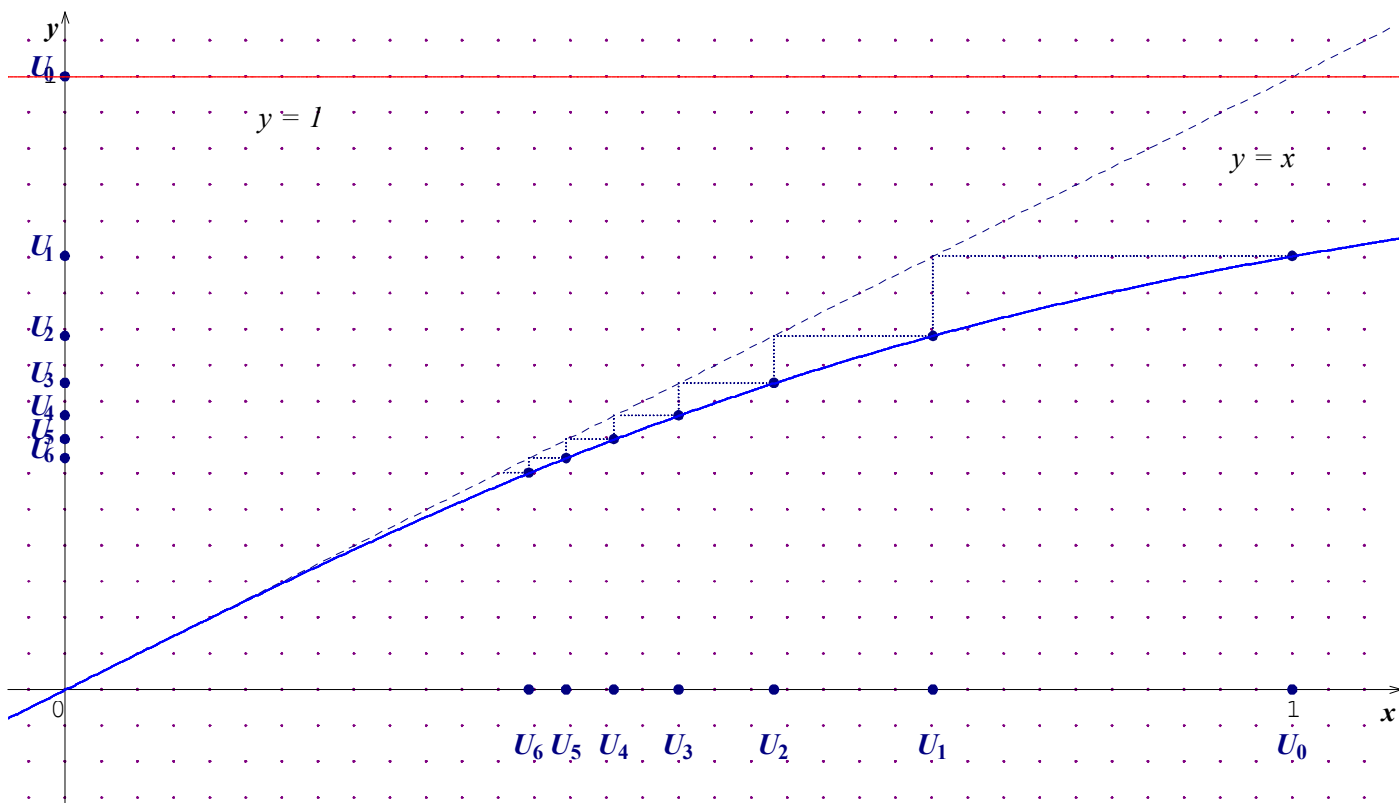
2/ Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$: On peut conjecturer graphiquement $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 1$, ce que confirme $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 1$.

Partie C :

Soit la suite (U_n) telle que $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2 + 1}}$, pour tout n entier naturel, soit $U_{n+1} = f(U_n)$.

1/ Placer $U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$ sur l'axe des ordonnées $y'y$, comme sur celui des abscisses $x'x$, ainsi que les points correspondants de la courbe C_f .





Etude du mode de Construction :

$U_0 = 1$ (axe $x'x$) . L'ordonnée de la courbe en cette abscisse est $U_1 = f(U_0)$. Le point de la courbe est $(U_0 ; U_1)$.

De ce point on va couper horizontalement la bissectrice $y = x$ au point $(U_1 ; U_1)$ ($y = x$).

L'abscisse de ce point est U_1 , dont on repart.

U_1 (axe $x'x$) . L'ordonnée de la courbe en cette abscisse est $U_2 = f(U_1)$. Le point de la courbe est $(U_1 ; U_2)$.

De ce point on va couper horizontalement la bissectrice $y = x$ au point $(U_2 ; U_2)$ ($y = x$).

L'abscisse de ce point est U_2 , dont on repart.

.....

2/ Conjecturer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

En suivant l'escalier des points $(U_n ; U_n)$ ou $(U_n ; U_{n+1})$, on conjecture $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

3/ Calculer la valeur exacte de U_1 , U_2 et U_3 . Conjecturer l'écriture littérale de U_n .

$$U_0 = 1 \Rightarrow U_1 = f(U_0) = \frac{U_0}{\sqrt{U_0^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \quad U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow U_2 = f(U_1) = \frac{U_1}{\sqrt{U_1^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow U_3 = f(U_2) = \frac{U_2}{\sqrt{U_2^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} . \text{ On peut conjecturer } U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} .$$

4/ Vérifier cette nouvelle conjecture par récurrence.

Soit la proposition de récurrence $P(n) : \ll U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \gg$.

Initialisation : On a vérifié $P(0), P(1), P(2), P(3)$ vraies.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie ($U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$). Peut-on en déduire $P(n+1)$ vraie ($U_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$) ?

$$\text{Supposant } U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \text{ on déduit } U_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{\sqrt{U_{n+1}^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1} + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

L'hérédité est vérifiée.

Conclusion : Sachant $P(0)$ vraie, l'hérédité permet d'affirmer que $P(n)$ est vraie pour tout n entier naturel.

5/ Soit g la fonction telle que $g(n) = U_n$.

Après une étude rapide de la fonction g , retrouver graphiquement les valeurs de U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 .

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, définie, continue et dérivable sur $[0; +\infty[$.

$g(0) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Dérivée : $g = \frac{1}{u} \Rightarrow g' = -\frac{u'}{u^2}$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

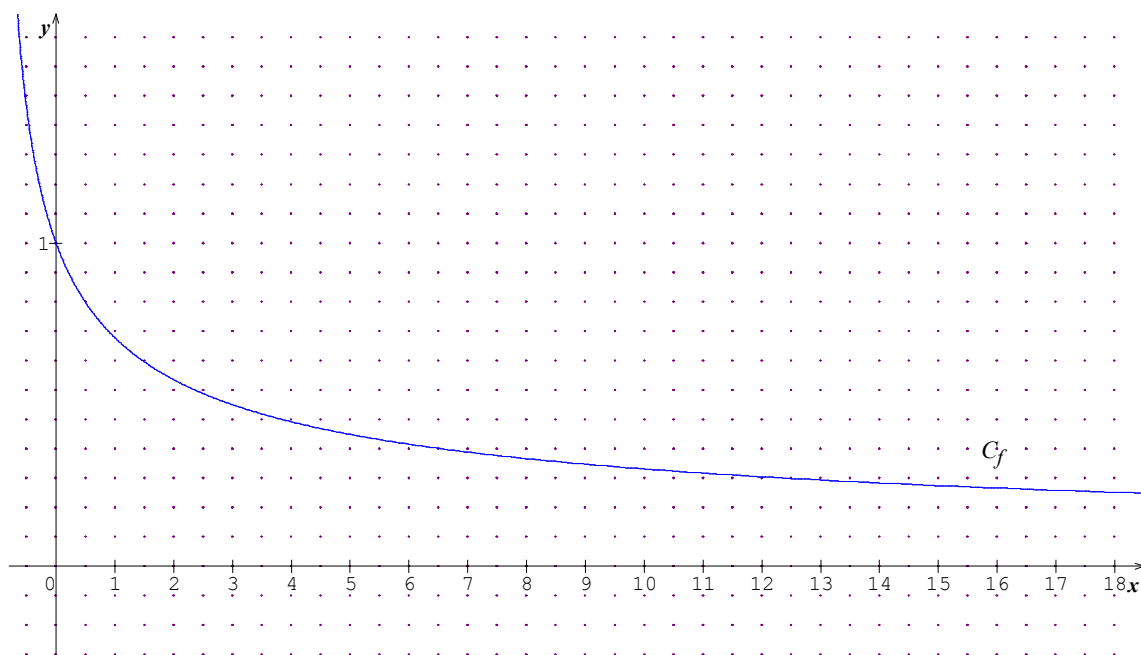
$g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$. On constate $g'(x) < 0$ sur $[0; +\infty[$.

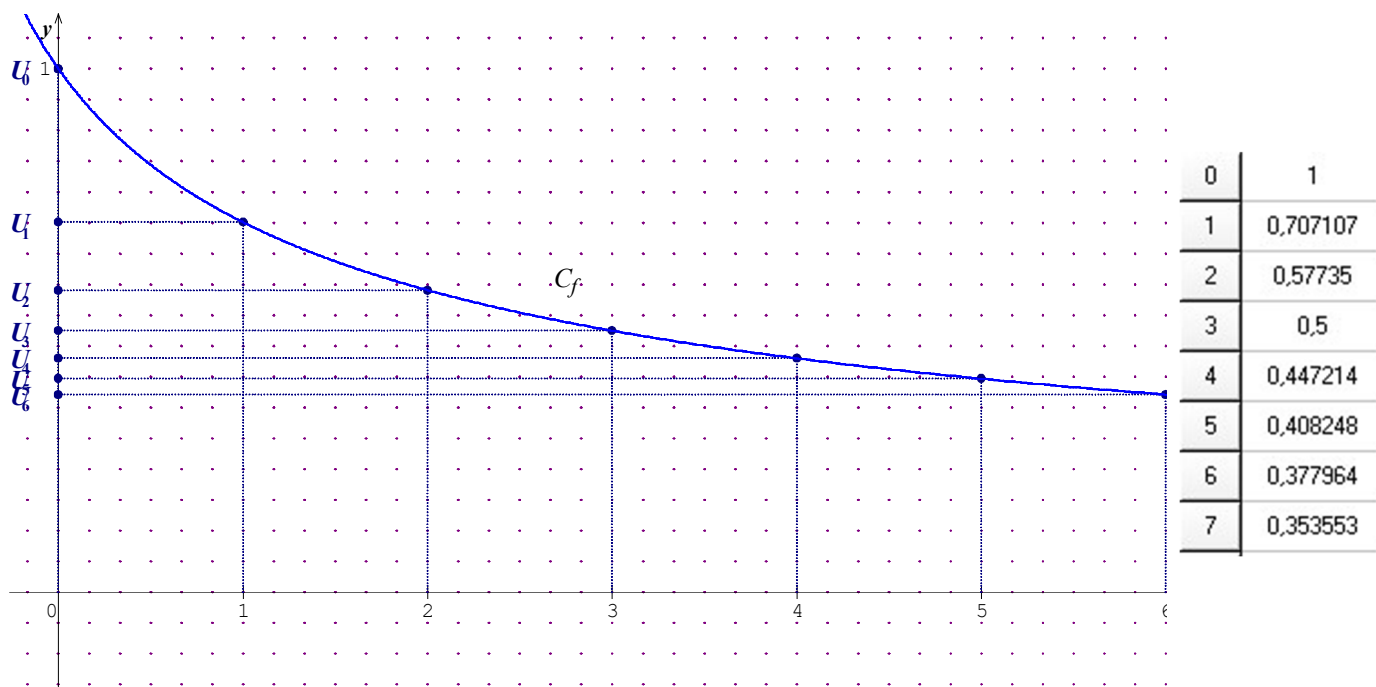
La fonction g est partout décroissante.

Tableau de Variation :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	-1/2	-	
$g(x)$	1	$\searrow$	0

Courbe Représentative :





$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707107 ; U_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57735 ; U_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = 0,5 ; U_5 = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447214 ; U_6 = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0,408248 .$$

Partie D :

Soit la suite numérique (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2 + 1}} \end{cases}$$

1/ Montrer que la suite (U_n) est à termes positifs.

Raisonnement par récurrence allégé :

La formule de construction de la suite (U_n) prouve que $U_n > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 0$, puisque $\sqrt{U_n^2 + 1} > 0$.

Comme $U_0 = 1$, on peut conclure $U_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2/ Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} < 1, \text{ d'où } 0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1 \Rightarrow U_{n+1} < U_n, \text{ sachant que les termes de la suite sont positifs.}$$

Ceci prouve que la suite (U_n) est décroissante.

3/ Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite L lorsque n tend vers l'infini.

Décroissante et minorée par 0, la suite (U_n) est convergente vers L , qui vérifie $0 \leq L < 1$.

Passons la relation de récurrence à sa limite pour $n \rightarrow +\infty$.

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{U_n^2 + 1}} \text{ devient } L = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 1}}, \text{ soit } 1 = \frac{1}{\sqrt{L^2 + 1}} \Leftrightarrow L^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow L = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 .$$

4/ Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n^2}$ pour tout entier naturel n .

a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique. Préciser sa raison.

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}^2} = \left(\frac{\sqrt{U_n^2 + 1}}{U_n} \right)^2 = \frac{U_n^2 + 1}{U_n^2} = 1 + \frac{1}{U_n^2} = 1 + V_n.$$

$$V_{n+1} - V_n = 1 \Leftrightarrow (V_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = 1.$$

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n .

$$V_n = V_0 + nr = \frac{1}{U_0^2} + n = 1 + n, \text{ soit } V_n = n + 1.$$

$$V_n = \frac{1}{U_n^2} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{\sqrt{V_n}} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

c) Retrouver ainsi la limite L de la suite (U_n) .

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0.$$