

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{x + 1}$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Si $x \rightarrow +\infty$: $x^2 + x + 1 \rightarrow +\infty$, donc $\sqrt{x^2 + x + 1} + x \rightarrow +\infty$.
 $x + 1 \rightarrow +\infty$.

Donc, f est de forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

On factorise x au numérateur et au dénominateur : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} + x}{x(1 + \frac{1}{x})} = \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x}{x(1 + \frac{1}{x})}$,

Comme $x > 0$, on a $|x| = x$, d'où : $f(x) = \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x}{x(1 + \frac{1}{x})} = \frac{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)}{x(1 + \frac{1}{x})} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}{1 + \frac{1}{x}}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{1+1}}{1} = 2$.

La fonction f admet une asymptote horizontale $y = 2$ pour x tendant vers $+\infty$.

Si $x \rightarrow -1$: $x^2 + x + 1 \rightarrow +1$, donc $\sqrt{x^2 + x + 1} + x \rightarrow 0$.
 $x + 1 \rightarrow 0$.

Donc, f est de forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Un polynôme nul en a admet la factorisation de $x - a$, soit : $P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x)$.

Le numérateur $P(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$ est bien nul en $x = -1$, mais n'est pas un polynôme.

On en fait un polynôme par la méthode du « conjugué », ce qui permettra de factoriser $x - 1$.

$$P(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x = \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \frac{(x^2 + x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$

On a bien factorisé $x - 1$ dans le numérateur $P(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$.

En conséquence : $\frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{x + 1} = \frac{\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}}{x + 1} = \frac{x + 1}{(x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$ si $x \neq -1$.

On déduit : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1) + 1} - (-1)} = +\frac{1}{2}$.

En posant $f(-1) = +\frac{1}{2}$, on remplace $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{x + 1}$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$, qui lui est partout

identique, sauf en $x = -1$, où f est indéterminée, et g définie par $+\frac{1}{2}$, par continuité.