Calculer les limites suivantes :

1/ Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Si $x \to +\infty$: $x^2+x+1 \to +\infty$, donc $\sqrt{x^2+x+1}+x \to +\infty$.

$x+1 \to +\infty$.

Donc, f est de forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

On factorise x au numérateur et au dénominateur : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+x}{x(1+\frac{1}{x})} = \dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}{x(1+\frac{1}{x})}$,

Comme $x>0$, on a $|x| = x$, d'où : $f(x) = \dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}{x(1+\frac{1}{x})} = \dfrac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}{x(1+\frac{1}{x})} = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}{1+\frac{1}{x}}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\sqrt{1}+1}{1} = 2$.

La fonction f admet une asymptote horizontale $y = 2$ pour x tendant vers $+\infty$.

Si $x \to -1$: $x^2+x+1 \to +1$, donc $\sqrt{x^2+x+1}+x \to 0$.

$x+1 \to 0$.

Donc, f est de forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$.

Un polynôme nul en a admet la factorisation de $x-a$, soit : $P(a)=0 \Leftrightarrow P(x) = (x-a).Q(x)$.

Le numérateur $P(x) = \sqrt{x^2+x+1}+x$ est bien nul en $x = -1$, mais n'est pas un polynôme.

On en fait un polynôme par la méthode du « conjugué », ce qui permettra de factoriser $x-1$.

$$P(x) = \sqrt{x^2+x+1}+x = \frac{(\sqrt{x^2+x+1}+x)(\sqrt{x^2+x+1}-x)}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} .$$

On a bien factorisé $x-1$ dans le numérateur $P(x) = \sqrt{x^2+x+1}+x$.

En conséquence : $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1} = \dfrac{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}}{x+1} = \dfrac{x+1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$ si $x \neq -1$.

On déduit : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{(-1)^2+(-1)+1}-(-1)} = +\dfrac{1}{2}$.

En posant $f(-1) = +\dfrac{1}{2}$, on remplace $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1}$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$, qui lui est partout identique,

sauf en $x = -1$, où f est indéterminée, et g définie par $+\dfrac{1}{2}$, par continuité.

Si $x \to 0$: $f(0) = \dfrac{1}{1} = +1$. La fonction est définie et continue en $x = 0$. Il est inutile de prendre une limite.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = +1$.

2/ Soit $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Si $x \to -\infty$: $g(x) = \dfrac{x^2(1 - \frac{1}{x})}{x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})} = \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$, soit $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$.

La fonction g admet une asymptote horizontale $y = 1$, lorsque x tend vers $-\infty$.

Si $x \to 2$: $g(2) = \dfrac{4 - 2}{4 + 2 - 2} = \dfrac{2}{6} = +\dfrac{1}{3}$. La fonction g est définie et continue en $x = 2$, d'où : $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2) = +\dfrac{1}{3}$.

Si $x \to 1$: $g(1) = \dfrac{0}{0}$, forme indéterminée.

Tout polynôme $P(x)$ nul en $x = a$, admet $x - a$ comme facteur.

$g(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \dfrac{x}{x + 2}$, si $x \neq 1$.

$\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x + 2} = +\dfrac{1}{3}$.