Calculer les limites suivantes :

1-a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x+3}$ **:** On est en présence d'une indétermination $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1ère méthode, Rapport des plus hauts degrés aux infinis : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x} = +\dfrac{1}{2}$.

2ème méthode : $\dfrac{x+1}{2x+3} = \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x(2+\frac{3}{x})} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x+3} = +\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$ **:** On est en présence d'une indétermination $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1ère méthode, Rapport des plus hauts degrés aux infinis : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}}$.

On ne sort ou n'entre que des quantités positives dans une racine carrée.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{-x} = -2$.

2ème méthode : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = -2$.

2-a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)$ **:** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2x+1} = 0$.

La continuité de la fonction *cosinus* en $x = 0$ est l'élément déterminant de la suite de la démonstration.

Si la fonction *cosinus* n'était pas continue en $X = 0$, nous aurions $\lim\limits_{X\to 0} (\cos X) \neq \cos 0$, disons $\lim\limits_{X\to 0} (\cos X) = b$.

Dans ce cas : En posant $X = \dfrac{1}{2x+1} \to 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\dfrac{1}{2x+1}\right) = \lim\limits_{X\to 0} (\cos X) = b$.

Ce serait alors une erreur de conclure que $X = \dfrac{1}{2x+1} \to 0$, donc $\lim\limits_{X\to 0} (\cos X) \neq \cos 0 = 1$.

Par contre : On sait que la fonction *cosinus* est continue en $X = 0$, donc $\lim\limits_{X\to 0} (\cos X) \neq \cos 0 = 1$.

Bonne présentation : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2x+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \cos\left(\dfrac{1}{2x+1}\right) = \cos 0 = 1$ (parce que *cosinus* est continue en $X = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x+1}{2x+3}\right)$ **:** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\pi x+1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x(\pi+\frac{1}{x})}{x(2+\frac{3}{x})} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\pi+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \dfrac{\pi}{2}$, sachant $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

La fonction *sinus* étant continue en $X = \dfrac{\pi}{2}$, on déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x+1}{2x+3}\right) = \lim\limits_{X\to\pi/2} \sin X = \sin\dfrac{\pi}{2} = +1$.