Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} .$$

Il est nécessaire de saisir l'importance la notion de *continuiité* d'une fonction dans le calcul d'une limite.

Dire que f est continue en $x = a$ signifie que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou encore : $\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a)$.

C'est la continuité de la fonction *extérieure* g en $f(a)$, qui autorise à transférer la limite en a de la fonction *intérieure* .

g continue en $f(a) \Rightarrow \lim_{x \to a} g[f(x)] = g[\lim_{x \to a} f(x)]$.

Retour à l'exercice :

La fonction « racine carrée » est continue sur l'ensemble de son domaine de définition.

Donc : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2x+3}}$, avec $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2x+3}$ indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(2+\frac{3}{x})} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}} \right) = \frac{1}{2}$, d'où : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{2x+3}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) .$$

La fonction « cosinus » est continue sur l'ensemble de son domaine de définition.

Donc : $\lim_{x \to -\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) = \cos\left(\lim_{x \to -\infty} \frac{\pi x}{2x+1}\right)$, avec $\lim_{x \to -\infty} \frac{\pi x}{2x+1}$ indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\pi x}{2x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\pi x}{x(2+\frac{1}{x})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\pi}{2+\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}$, d'où : $\lim_{x \to -\infty} \cos\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.