Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$, de courbe représentative C_f dans un repère.

<u>Partie A : Etude d'une fonction rationnelle</u>

1/ Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.

Si $x \to -\infty$: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ est *indéterminée*, de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$f(x) = \frac{x(x - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}, \text{ avec } \lim_{x \to -\infty} (x - \frac{1}{x}) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{2}{x}) = 1 .$$

On déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Si $x \to +\infty$: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ est *indéterminée*, de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$f(x) = \frac{x(x - \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}, \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} (x - \frac{1}{x}) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{2}{x}) = 1 .$$

On déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Autre méthode : Un rapport de polynômes se comporte aux infinis comme le rapport de ses plus hauts degrés $\dfrac{x^2}{x} = x$.

On obtient les mêmes résultats (heureusement).

Remarque : On peut pressentir une *asymptote oblique* (rapport des plus hauts degrés = x , comme $y = ax + b$).

Si $x \to -2$, $x < -2$, aussi noté $x \to -2^-$: $\begin{cases} x^2 - 1 \to +3 \\ x + 2 \to 0^- \end{cases}$, d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$.

Si $x \to -2$, $x > -2$, aussi noté $x \to -2^+$: $\begin{cases} x^2 - 1 \to +3 \\ x + 2 \to 0^+ \end{cases}$, d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$.

Interpréter graphiquement.

On déduit une *asymptote verticale*, d'équation $x = -2$.

2/ Déterminer a , b et c réels, tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 2}$.

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2} = \frac{(ax + b)(x + 2) + c}{x + 2} = \frac{ax^2 + (2a + b)x + (2b + c)}{x + 2} .$$

On *identifie* les numérateurs de $\dfrac{ax^2 + (2a + b)x + (2b + c)}{x + 2}$ et $\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ (même coefficient à chaque degré de x).

$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = +3 \end{cases}$, d'où : $f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x + 2}$.

Autre méthode : $\dfrac{x^2-1}{x+2} = \dfrac{x(x+2)\text{ -}2x-1}{x+2} = \dfrac{x(x+2)\text{ -}2(x+2)+3}{x+2} = x-2+\dfrac{3}{x+2}$.

Interpréter graphiquement.

$$\lim_{x\to\pm\infty} E(x) = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x+2} = 0 .$$

La courbe C_f admet une *asymptote oblique* d'équation $y = x-2$.

2/ Etudier les variations de la fonction *f* .

Sachant $(\dfrac{1}{u})' = \text{-}\dfrac{u'}{u^2}$, on peut dériver f sous la forme $f(x) = x-2+\dfrac{3}{x+2}$.

$$f'(x) = 1-\frac{3}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2-3}{(x+2)^2} = \frac{(x+2\text{ -}\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})}{(x+2)^2}$$, ou encore $f'(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \text{-}2\text{ -}\sqrt{3} \approx \text{-}3{,}73 \ ,\ y_1 = f(\text{-}2-\sqrt{3}) = \text{-}4\text{ -}\sqrt{3}+\dfrac{3}{\text{-}\sqrt{3}} = \text{-}4\text{ -}2\sqrt{3} \approx \text{-}7{,}46 \\ x_2 = \text{-}2+\sqrt{3} \approx \text{-}0{,}27 \ ,\ y_1 = f(\text{-}2+\sqrt{3}) = \text{-}4+\sqrt{3}+\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \text{-}4+2\sqrt{3} \approx \text{-}0{,}54 \end{cases}$$, extrema .

$f'(x)$ est du signe de son numérateur x^2+4x+1 .

Voir les variations sur le tableau ci-dessous.

3/ Dresser le tableau de variation de la fonction *f* .

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$			-2			$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–		||		–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-7,46	↘	$-\infty$	||	$+\infty$	↘	-0,54	↗	$+\infty$

<u>Partie B : Etude de deux tangentes parallèles</u>

1/ Déterminer l'équation réduite de la tangente T_A à la courbe C_f en un point d'abscisse 1 .

$T_A : y = f'(1)(x-1)+f(1) \Rightarrow T_A : y = \dfrac{2}{3}(x-1)+0$, soit $T_A :\ y = \dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$.

Le point $A(1\ ;\ 0)$ est à une intersection de C_f avec l'axe $x'x$ des abscisses.

2/ Déterminer les coordonnées du point B en lequel la courbe admet une tangente parallèle à T_A .

L'abscisse x de B vérifie $f'(x) = \dfrac{2}{3}$, à l'identique de celle de A .

$$f'(x) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1-\frac{3}{(x+2)^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{(x+2)^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = \text{-}3 \Leftrightarrow \boldsymbol{x_B = \text{-}5} \\ \text{ou} \\ x+2 = +3 \Leftrightarrow x_A = +1 \end{cases} .$$

$y_B = f(x_B) = f(\text{-}5) = \text{-}5-2+\dfrac{3}{\text{-}5+2} = \text{-}8$, soit $B(\text{-}5\ ;\ \text{-}8)$.

3/ Déterminer l'équation réduite de la tangente T_B .

$T_B : y = f'(\text{-}5)(x+5)+f(\text{-}5) = \dfrac{2}{3}(x+5)-8$, soit , soit $T_B : y = \dfrac{2}{3}x\text{ -}\dfrac{14}{3}$. (Même pente $+\dfrac{2}{3}$ que T_A).

4/ Tracer C_f , T_A et T_B .