Démontrer que la fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Une fonction f est dite strictement croissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tout a , b appartenant à I :

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b) .$$

<u>1ère présentation</u> : (Mettre en évidence $b - a > 0$)

Soit $f : x \to f(x) = \sqrt{x}$, pour tout $x \geq 0$.

$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ est équivalent à $a < b \Rightarrow f(b) - f(a) > 0$ ou $b - a > 0 \Rightarrow f(b) - f(a) > 0$.

(Il est souvent plus aisé de comparer une différence à 0 , que de comparer deux nombres entre eux).

$$\text{Pour } 0 \leq a < b : \ f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0 \text{, puisque } \begin{cases} b - a > 0 \\ \text{et} \\ \sqrt{b} + \sqrt{a} > 0 \end{cases} .$$

La fonction *racine carrée* f est bien strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2ème présentation : (Utilisation directe de la formule du *Taux de Variation* entre a et b)

<u>*Remarque*</u> : La notion de *croissance* est ambigüe :

A pied, sur un chemin en pente, celui-ci peut *monter lorsque l'on avance*, mais il *descend quand on recule*.

Ainsi : f strictement croissante s'écrit : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$,

mais pourrait aussi s'écrire : $a > b \Rightarrow f(b) > f(a)$.

Ce qui importe, c'est que le <u>sens de l'inéquation</u> soit <u>le même</u> dans $a < b$ que dans $f(a) < f(b)$, ou l'inverse.

$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$: f croissante (en moyenne) entre a et b

$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$: f décroissante (en moyenne) entre a et b .

C'est l'expression « pour tout a et b appartenant à I », qui permet de s'affranchir de « en moyenne ».

On généralise les deux cas précédents en utilisant $T_{a,b} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, le *Taux de Variation* de f entre a et b .

$$\text{Peu importe que l'on ait } a < b \text{ ou } a > b \text{, on aura : } \begin{cases} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0 \Leftrightarrow f \text{ croissante (en moyenne) entre } a \text{ et } b \\ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0 \Leftrightarrow f \text{ décroissante (en moyenne) entre } a \text{ et } b \end{cases} .$$

La notion de Taux de variation de f entre a et b est une approche de la notion de dérivée de f en a .

$$\text{Ici : } T_{a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0 .$$

La fonction *racine carrée* f est bien strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.