Démontrer que la fonction $f : x \to f(x) = x\sqrt{x}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Une fonction f est dite strictement croissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tout a , b appartenant à I :

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

ou encore : Taux de Variation entre a et b :

$$T_{a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

Remarque : La notion de *croissance* est ambigüe :

A pied, sur un chemin en pente, celui-ci peut *monter lorsque l'on avance*, mais il *descend quand on recule.*

Ainsi : f strictement croissante s'écrit : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$,b

mais pourrait aussi s'écrire : $a > b \Rightarrow f(b) > f(a)$.

Ce qui importe, c'est que le sens de l'inéquation soit le même dans $a < b$ que dans $f(a) < f(b)$, ou l'inverse.

$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$: f croissante (en moyenne) entre a et b

$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$: f décroissante (en moyenne) entre a et b .

C'est l'expression « pour tout a et b appartenant à I », qui permet de s'affranchir de « en moyenne ».

On généralise les deux cas précédents en utilisant $T_{a,b} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, le *Taux de Variation* de f entre a et b .

Peu importe que l'on ait $a < b$ ou $a > b$, on aura : $\begin{cases} \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0 \Leftrightarrow f \text{ croissante (en moyenne) entre } a \text{ et } b \\ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0 \Leftrightarrow f \text{ décroissante (en moyenne) entre } a \text{ et } b \end{cases}$.

La notion de Taux de variation de f entre a et b est une approche de la notion de dérivée de f en a .

Ici : $T_{a,b} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{b\sqrt{b} - a\sqrt{a}}{b - a} = \dfrac{b\sqrt{b} - a\sqrt{b} + a\sqrt{b} - a\sqrt{a}}{b - a} = \dfrac{(b - a)\sqrt{b} + a(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{b - a} = \sqrt{b} + \dfrac{a(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{b - a}$,

$$T_{a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \sqrt{b} + \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \sqrt{b} + \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0 .$$

La fonction f est bien strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.