**Démontrer que la fonction $f : x \to f(x) = x^3$ est strictement croissante sur l'intervalle tout intervalle $I$ réel.**

**On pourra utiliser : $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ .**

Une fonction $f$ est dite strictement croissante sur un intervalle $I$ si et seulement si, pour tout $a$ , $b$ appartenant à $I$ :

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

ou encore : Taux de Variation entre $a$ et $b$ :

$$T_{a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

*Remarque* : La notion de *croissance* est ambigüe :

A pied, sur un chemin en pente, celui-ci peut *monter lorsque l'on avance*, mais il *descend quand on recule*.

Ainsi : $f$ strictement croissante s'écrit : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ ,b

mais pourrait aussi s'écrire : $a > b \Rightarrow f(b) > f(a)$ .

Ce qui importe, c'est que le sens de l'inéquation soit le même dans $a < b$ que dans $f(a) < f(b)$ , ou l'inverse.

$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ : $f$ croissante (en moyenne) entre $a$ et $b$

$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ : $f$ décroissante (en moyenne) entre $a$ et $b$ .

C'est l'expression « pour tout $a$ et $b$ appartenant à $I$ », qui permet de s'affranchir de « en moyenne ».

On généralise les deux cas précédents en utilisant $T_{a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , le *Taux de Variation* de $f$ entre $a$ et $b$ .

Peu importe que l'on ait $a < b$ ou $a > b$ , on aura : $\begin{cases} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0 \Leftrightarrow f \text{ croissante (en moyenne) entre } a \text{ et } b \\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0 \Leftrightarrow f \text{ décroissante (en moyenne) entre } a \text{ et } b \end{cases}$ .

*La notion de Taux de variation de $f$ entre $a$ et $b$ est une approche de la notion de dérivée de $f$ en $a$ .*

Ici : $T_{a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{(b - a)(b^2 + ab + a^2)}{b - a} = b^2 + ab + a^2$ .

Etudions le signe du trinôme $b^2 + ab + a^2$ selon les valeurs de $a$ et $b$ réelles.

Selon la forme canonique : $(b + \frac{a}{2})^2 = b^2 + ab + \frac{a^2}{4}$ , d'où :

$b^2 + ab + a^2 = (b + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + a^2 = (b + \frac{a}{2})^2 + \frac{3}{4}a^2 > 0$ , pour tout $a \neq b$ réels (somme de deux carrés).

La fonction $f$ est bien strictement croissante sur tout intervalle $I$ de réels.