Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|-x^2 + 6x - 8| = 1$.

Plusieurs méthodes de résolution sont possibles.

Toutes sont équivalentes, et aboutissement aux mêmes équations à résoudre, mais les deux premières sont plus rapides, sous réserves qu'il n'y ait qu'une seule valeur absolue dans l'équation :

1ère Méthode : Deux nombres ayant même valeur absolue sont soit *égaux* , soit *opposés* : $|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a = -b \end{cases}$.

$$|-x^2 + 6x - 8| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 6x - 8 = +1 \\ \text{ou} \\ -x^2 + 6x - 8 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 6x + 7 = 0 \end{cases} .$$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$, soit $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = +3$ (racine double).

$$x^2 - 6x + 7 = 0 \text{ , } \Delta = b^2 - 4ac = +8 = (2\sqrt{2})^2 \text{ , d'où : } \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 + 2\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2} \end{cases} .$$

Donc $S = \{3 - \sqrt{2} \,;\, 3 \,;\, 3 + \sqrt{2}\}$, 3 solutions

2ème Méthode : Deux nombres sont de même carré, si et seulement si, ils ont même valeur absolue: $a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$.

Prenons l'égalité dans le sens : $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

Comme +7 est un nombre positif : $|-x^2 + 6x - 8| = 1 \Leftrightarrow |-x^2 + 6x - 8| = |+1| \Leftrightarrow (-x^2 + 6x - 8)^2 = 1^2$.

Sachant $(-a)^2 = a^2$, on peut alléger l'égalité : $(x^2 - 6x + 8)^2 = 1^2$.

$A^2 = B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 = 0 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0$, soit $A = B$ ou $A = -B$.

$(x^2 - 6x + 8)^2 = 1^2 \Leftrightarrow [(x^2 - 6x + 8) - 1] [(x^2 - 6x + 8) + 1] = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 7)(x^2 - 6x + 9) = 0$.

$$x^2 - 6x + 7 = 0 \text{ , } \Delta = b^2 - 4ac = +8 = (2\sqrt{2})^2 \text{ , d'où : } \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 + 2\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2} \end{cases} .$$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0$, soit $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = +3$ (racine double).

Donc $S = \{3 - \sqrt{2} \,;\, 3 \,;\, 3 + \sqrt{2}\}$, 3 solutions

3ème Méthode :

On sait que $\begin{cases} a \geq 0 \Leftrightarrow |a| = a \\ a < 0 \Leftrightarrow |a| = -a \text{ pour rendre le résultat positif} \end{cases}$.

Cherchons le signe de $-x^2 + 6x - 8$ selon les valeurs réelles de x .

$$\text{Calcul des racines de } -x^2 + 6x - 8 = 0 : \Delta = b^2 - 4ac = +4 = 2^2 \text{ , soit } \begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6 + 2}{-2} = +2 \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6 - 2}{-2} = +4 \end{cases} .$$

Tableau de Signes :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$-x^2 + 6x - 8$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\lvert -x^2 + 6x - 8\rvert$		$x^2 - 6x + 8$	0	$-x^2 + 6x - 8$	0	$x^2 - 6x - 8$	

<u>1^er cas</u> : $x < +2$ ou $x > +4$:

a) $|-x^2 + 6x - 8| = 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 1$, soit $x^2 - 6x + 7 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = +8 = (2\sqrt{2})^2$,

d'où : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \Delta}{2a} = \dfrac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2} \approx +1{,}6 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 + 2\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2} \approx +4{,}4 \end{cases}$. Les solutions vérifient $x < +2$ pour l'une, et $x > +4$ pour l'autre (valables).

<u>2^ème cas</u> : $+2 \leq x \leq +4$:

$|-x^2 + 6x - 8| = 1 \Rightarrow -x^2 + 6x - 8 = 1$, soit $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = +3$ $(+2 \leq +3 \leq +4)$.

La réunion des deux cas donne : $S = \{3 - \sqrt{2} \,;\, 3 \,;\, 3 + \sqrt{2}\}$, 3 solutions

Remarque :

Sauf cas très particulier, cette dernière méthode est la seule possible lorsque l'équation comporte plusieurs valeurs absolues.

<u>Exemple</u> :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|3x + 2| - |x - 1| = 1 - 3x$. <u>*Rappel*</u> : $\left\{\begin{array}{l} A \geq 0 \Leftrightarrow |A| = A \\ A < 0 \Leftrightarrow |A| = -A \text{ , pour le rendre positif .} \end{array}\right\}$

x	$-\infty$		-2/3		+1		$+\infty$
$3x + 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\mathbf{\lvert 3x + 2\rvert}$		$\mathbf{-3x - 2}$	**0**	$\mathbf{3x + 2}$	|	$\mathbf{3x + 2}$	
$\mathbf{\lvert x - 1\rvert}$		$\mathbf{-x + 1}$	|	$\mathbf{-x + 1}$	**0**	$\mathbf{x - 1}$	

<u>**1ère zone**</u> **:** $x < -\dfrac{2}{3}$.

$|3x + 2| - |x - 1| = 1 - 3x$ devient $(-3x - 2) - (-x + 1) = 1 - 3x \Leftrightarrow -3x - 2 + x - 1 = 1 - 3x \Leftrightarrow x = +4$.

On remarque que $+4$ ne respecte pas les conditions imposées par la zone, donc **la valeur n'est pas retenue**.

<u>**2ème zone**</u> **:** $-\dfrac{2}{3} \leq x < 1$.

$|3x + 2| - |x - 1| = 1 - 3x$ devient $(3x + 2) - (-x + 1) = 1 - 3x \Leftrightarrow 3x + 2 + x - 1 = 1 - 3x \Leftrightarrow x = 0$.

Cette solution appartient bien à la zone 2.**(valable).**

<u>**3ème zone**</u> **:** $x \geq 1$.

$|3x + 2| - |x - 1| = 1 - 3x$ devient $(3x + 2) - (x - 1) = 1 - 3x \Leftrightarrow 3x + 2 - x + 1 = 1 - 3x \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{5}$.

Cette solution n'appartient pas à la zone 3. **(non valable).**

En conclusion, la seule solution est $x = 0$, soit : $S = \{ 0 \}$.