1/ Résoudre dans ℝ : $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1+x}{x}$.

Domaine : Les fractions imposent $x \neq 0$ et $x \neq -1$, soit $D = \mathbb{R} - \{0\,;\,-1\}$.

$\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1+x}{x} \Leftrightarrow x^2 = (1+x)^2$ *Produit en croix*, soit $x^2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$, $x = -\dfrac{1}{2}$.

L'ensemble solution est $S = \{-\dfrac{1}{2}\}$.

Remarque : On voit que $\dfrac{1+x}{x}$ est l'*inverse* de $\dfrac{x}{1+x}$. Or les seuls nombres réels égaux à leur inverse sont -1 et + 1.

$\dfrac{1+x}{x} = -1 \Leftrightarrow 1 + x = -x \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{1+x}{x} = +1 \Leftrightarrow 1 + x = x \Leftrightarrow 1 = 0$ (impossible).

2/ Résoudre dans ℝ : $\dfrac{x}{1+x} \leq \dfrac{1+x}{x}$.

Domaine : Les fractions imposent $x \neq 0$ et $x \neq -1$, soit $D = \mathbb{R} - \{0\,;\,-1\}$.

Ne connaissant pas le signe des dénominateurs, on ne peut faire le produit en croix :

$\dfrac{x}{1+x} \leq \dfrac{1+x}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{1+x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x(1+x)} - \dfrac{(1+x)^2}{x(1+x)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - (1+x)^2}{x(1+x)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{[x-(1+x)][x+(1+x)]}{x(1+x)} \leq 0$.

$\dfrac{(-1)(2x+1)}{x(1+x)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x-1}{x(1+x)} \leq 0$.

x	$-\infty$		-1		-1/2		0		$+\infty$
$-2x-1$		–	|	–	0	+	|	+	
x		–	|	–	|	–	0	+	
$x+1$		–	0	+	|	+	|	+	
$\dfrac{-2x-1}{x(1+x)}$		**–**	‖	**+**	**0**	**-**	‖	**+**	

$\boldsymbol{S =]-\infty\,;\,-1\,[\;\cup\;[\,-\frac{1}{2}\,;\,0\,[}$ **.**